

Wyskochocki
ADAM GAJECKI

ASYSTENT WYŻSZEJ SZKOŁY HANDLOWEJ W WARSZAWIE

245
645^a

Podstawowe wiadomości
z
ARYTMETYKI POLITYCZNEJ
i
ZBIÓR ZADAŃ

WYDANIE DRUGIE

WARSZAWA
1929

M *W*

Podawany

PODSTAWOWE WIADOMOŚCI
z
ARYTMETYKI POLITYCZNEJ

Przebieg
60005

ADAM GAJECKI

ASYSTENT WYŻSZEJ SZKOŁY HANDLOWEJ W WARSZAWIE

Podstawowe wiadomości
z
ARYTMETYKI POLITYCZNEJ
i
ZBIÓR ZADAŃ

WYDANIE DRUGIE

WARSZAWA

1929



58537
511.1.1.33

ARYTMETYKA HANDLOWA

CZĘŚĆ PIERWSZA

TECHNIKA SPRAWNEGO LICZENIA

AL. LIPA i A. GAJECKI, WARSZAWA 1928.

Biblioteka Pedagogiczna w Radomiu
nr inw.: K - 58537



BGZs 58537

8/84/234

PRZEDMOWA DO WYDANIA 1-GO.

Przystępowałem do napisania niniejszej pracy przedewszystkiem z myślą o zapelnieniu luki, odczuwanej przez ogół studentów Wyższej Szkoły Handlowej w Warszawie przy nauce Arytmetyki politycznej.

Z tego powodu treść całej pracy przystosowałem do wykładu przedmiotu i, omawiając zwięźle część teoretyczną, zwróciłem baczną uwagę na stronę praktyczną poruszanych zagadnień.

Korzystałem przytem niejednokrotnie z łaskawie udzielanych przez Pana Profesora Władysława Strzeleckiego uwag i wskazówek, za które składam Mu serdeczne podziękowanie.

A. G.

Warszawa, w grudniu 1924 roku.

PRZEDMOWA DO WYDANIA 2-GO.

Wydanie niniejsze posiada zasadniczo układ poprzedniego. Różnica polega jedynie na obszerniejszem potraktowaniu działu wkładek, rent oraz kursu pożyczek.

A. G.

Warszawa, w grudniu 1928 roku.

WSTĘP.

Nazwę „Arytmetyka polityczna” wprowadził pisarz angielski *Sir William Petty* (*Several essays in political arithmetic*, 1683), obejmując nią dziedzinę zagadnień ze śmiertelnością związanych.

Później zaliczono do Arytmetyki politycznej te zjawiska życia państwowego i społecznego, które można było ująć w rachunek, więc nie tylko ludność, śmiertelność, ale i dochody państwowe, podatki, stan rolnictwa i różnych gałęzi przemysłu i t. d.

Hoene Wroński określił Arytmetykę polityczną jako naukę, mającą za przedmiot prawidła, według których można oceniać siły państwa.

Dominik Krysiński w rozprawie o Arytmetyce politycznej, czytanej na publicznym posiedzeniu Towarzystwa Królewskiego Warszawskiego Przyjaciół Nauk dnia 30-go kwietnia 1814 roku, powiada, że... Arytmetyka polityczna przebiega i wskazuje środki, jak obrachowywać przez przybliżenie lub przynajmniej w najważniejszych punktach konsumpcję narodów.

Obydwa uczeni podali tylko wiadomości o zadaniach Arytmetyki politycznej, lecz nie pozostawili nam wykładu tej nauki. Wskazówek w tym względzie poszukać musimy w podręcznikach Arytmetyki politycznej. Poniżej podajemy spis niektórych nowszych prac z tej dziedziny.

A. Czajewicz. Umarzanie pożyczek długoterminowych i niektóre operacje finansowe, Warszawa, 1905.

A. B. Danielewicz i S. Dickstein. Zarys Arytmetyki politycznej, Warszawa, 1910.

A. Pawłowski. Zasady Arytmetyki politycznej, Lwów, 1905.

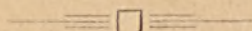
Bleibtreu. Politische Arithmetik, Heidelberg, 1853.

M. Cantor. Politische Arithmetik oder Arithmetik der täglichen Lebens, Lipsk, 1898.

G. Rothbaum. Lehrbuch der politischen Arithmetik für höhere Handelsschulen, Wiedeń, 1907.

Przeglądając te podręczniki przekonamy się, że Arytmetyka polityczna nie była i nie jest nauką jednolitą. Jest to bowiem zbiór zastosowań matematyki do rozmaitych zagadnień, z których każde może stanowić osobny dział stosowany. Niektóre z tych działów, jak Statystyka matematyczna, Statystyka ubezpieczeniowa, Rachunek prawdopodobieństwa lub Matematyka ubezpieczeniowa są obecnie osobnymi naukami, posługującymi się własnymi metodami. Inne znów zagadnienia, dawniej w kursie Arytmetyki politycznej uwzględniane, zaliczamy obecnie do Arytmetyki handlowej, jak wiadomości o miarach i wagach, pieniądzach, wekslach, papierach wartościowych, arbitrażach i t. p.

W niniejszej pracy zajmujemy się tylko rachunkiem procentu składanego i jego zastosowaniem do długoterminowych operacyj finansowych.



Pojęcia ogólne.

Oprocentowanie wnoszonych do instytucyj finansowych wkładów bywa obliczane dwojako, zależnie od tego, czy chodzi o lokaty krótko czy długoterminowe. W pierwszym wypadku narosły procent bywa co pewien czas wypłacany tak, iż pierwotny kapitał nie ulega zmianie i procent oblicza się zawsze od tego samego kapitału, w drugim wypadku narosły procent bywa co pewien czas włączany do kapitału pierwotnego i następnie oblicza się dalej procent od kapitału pierwotnego, zwiększonego o narosły odeń od danej chwili procent. Wówczas kapitał pierwotny z biegiem czasu wzrasta.

Procent pierwszego rodzaju nazywa się *zwyczajnym*, procent drugiego rodzaju — *składanym*.

Czynność, związana z doliczaniem procentów w lokatach długoterminowych nosi miano *kapitalizacji*. Przyczem, jeżeli procent dopisuje się w końcu danego okresu, mamy do czynienia z kapitalizacją *zdółu*, gdy — na początku danego okresu — z kapitalizacją *zgóry*.

W dalszym ciągu mówić będziemy tylko o kapitalizacji *zdółu*.

ROZDZIAŁ I.

Kapitał na procencie składanym.

1. Okresy roczne.

Jeżeli kapitał umieszczony jest na $p\%$ przy rocznej kapitalizacji zdołu na procent składany, to jednostka jego wzrośnie po roku o $\frac{p}{100} = i$ do wartości $1 + i = r$. Gdy kapitał końcowy każdego roku nazywać będziemy kapitałem początkowym następnego roku, to otrzymamy

na początku 1. roku 1	w końcu 1. roku r
„ „ 2. „ r	„ „ 2. „ r^2
„ „ 3. „ r^2	„ „ 3. „ r^3
• • • • •	• • • • •
na początku n . roku r^{n-1}	w końcu n . roku r^n .

Wogóle po n latach jednostka kapitału wzrośnie do r^n . Gdyby kapitał początkowy wynosił K jednostek, to z końcem n . roku wzrosłby do kwoty

$$K_n = K \cdot r^n$$

We wzorze powyższym wartość K nazywamy wartością początkową kapitału, K_n — wartością końcową, r — czynnikiem oprocentowującym.

Wartości czynnika r ułożone są w postaci tablicy dla kolejnych wartości czasu i dla różnych stóp procentowych (Tablica I).

Przykład 1. Złożono do banku Zł 1000.— na procent składany przy 4% rocznie. Ile odebrano po 20 latach?

Tutaj kapitał początkowy $K = 1000$.—; szukamy kapitału końcowego. Ze wzoru:

$$K_n = K \cdot r^n$$

$$K_{20} = 1000 \cdot r^{20}, \text{ gdzie } r = 1,04$$

W tablicy I. szukamy wartości czynnika oprocentowującego przy 4% i 20 latach: $r^{20} = 2,19112^*$). Jest to wartość do jakiej urosnie jednostka kapitału po 20 latach przy 4%. Zatem 1000 jednostek urosnie do wartości 1000 razy większej: $K_{20} = 1000 \cdot 2,19112$

$$K_{20} = \text{Zł } 2191.12$$

Przykład 2. Jaka jest wartość końcowa kapitału Zł 8000.— oddanego przy 4% na 17 lat i 3 miesiące na procent składany?

W tym wypadku stosujemy ten sam wzór $K_n = kr^n$ z tą różnicą, że wartość czynnika obliczamy dla $n = 17\frac{1}{4}$ na zasadzie proporcjonalności. Mamy więc: $K_{17,25} = 8000 \cdot r^{17,25}$. Tablica I. daje wartości tylko dla lat całkowitych. Bierzemy wobec tego wartości sąsiednie dla 17 i 18 lat mieszczące między sobą wartość dla $17\frac{1}{4}$ lat.

$$\left. \begin{array}{l} r^{17} = 1,94790 \text{ (z niedomiarem) } \\ r^{18} = 2,02582 \text{ (z nadmiarem) } \end{array} \right\} \text{ przy } 4\%$$

Zauważmy, że wartość czynnika oprocentowującego wzrasta z czasem i wzrost ten dla 1 roku wyniesie

$$\begin{array}{r} 2,02582 \\ - 1,94790 \\ \hline 0,07792 \end{array}$$

a więc dla $\frac{1}{4}$ roku będzie tylko $0,07792 \times \frac{1}{4} = 0,01948$ t. j. wartość $r^{17,25} = 1,94790 + 0,01948 = 1,96738$ i ostatecznie $K_{17,25} = 8000 \times 1,96738$

$$K_{17,25} = \text{Zł } 15739.04$$

Przykład 3. Oddano Zł 5000.— na procent składany przy $3\frac{1}{4}\%$. Ile otrzymano po 40 latach?

Stosujemy znany wzór $K_n = K \cdot r^n$

$$K_{40} = 5000 \cdot r^{40} \text{ przy } 3\frac{1}{4}\%$$

*) Zadania i przykłady rozwiązywać będziemy w przybliżeniu, biorąc 5 znaków za przecinkiem.

Znowu nie znamy tablic bezpośrednich, gdyż dla stopy $3\frac{1}{4}\%$ niema wartości czynników oprocentowujących. Aby tę wartość w przybliżeniu otrzymać, korzystamy z wartości sąsiednich t.j. dla 3% i 4% , odczytanych dla 40 lat. Będziemy mieli:

przy 3% i 40 latach — 3,26204 (z nadmiarem)

„ 4% i „ „ — 4,80102 (z niedomiarem)

Rozumując jak poprzednio widzimy, że przy wzroście stopy o 1% wartość czynnika wzrosła o

$$\begin{array}{r} 4,80102 \\ - 3,26204 \\ \hline 1,53898 \end{array}$$

W takim razie dla $\frac{1}{4}\%$ wzrost wyniósłby $1,53898 \times \frac{1}{4} = 0,38475$, a więc stopie $3\frac{1}{4}\%$ odpowiada czynnik $3,26204 + 0,38475 = 3,64679$ dla 40 lat. Ostatecznie więc $K_{40} = 5000 \cdot 3,64679$

$$K_{40} = \text{Zł } 18233.95.$$

Przykład 4. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał Zł 1000.— oddany na 12 lat i 9 miesięcy przy $4\frac{1}{2}\%$? Ze wzoru $K_n = K \cdot r^n$

$$K_{12,75} = 1000 \cdot r^{12,75}$$

W tym wypadku stosujemy powyżej wskazaną zasadę wypośrodkowania dwa razy; 1) dla czasu, 2) dla stopy procentowej, lub w odwrotnym porządku, wychodząc z następujących czterech wartości:

n	4%	5%
12	1,60103	1,79586
13	1,66507	1,88565

1) dla 4%

1,66507

— 1,60103

$$0,06404 \times \frac{3}{4} = 0,04803$$

+ 1,60103

— 0,04803

1,64906

dla 5%

1,88565

— 1,79586

$$0,08979 \times \frac{3}{4} = 0,06734$$

+ 1,79586

— 0,06734

1,86320

$$\begin{array}{rcl}
 5\%_0 & - & 12\frac{3}{4} \text{ lat} - 1,86320 \\
 4\%_0 & - & 12\frac{3}{4} \text{ lat} - 1,64906 \\
 1\%_0 & - & 12\frac{3}{4} \text{ lat} - 0,21414 \\
 \frac{1}{2}\%_0 & - & 12\frac{3}{4} \text{ lat} - 0,10707 \\
 4\%_0 & - & 12\frac{3}{4} \text{ lat} - 1,64906 \\
 4\frac{1}{2}\%_0 & - & 12\frac{3}{4} \text{ lat} - 1,75613
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl}} \right\} +$$

$$\text{Ostatecznie } K_{12,75} = 1000 \cdot 1,75613$$

$$K_{12,75} = \text{Zł } 1756.13.$$

albo 2) dla 12 lat	dla 13 lat
1,79586	1,88565
1,60103	1,66507
$0,19483 \times \frac{1}{2} = 0,09742$	$0,22058 \times \frac{1}{2} = 0,11029$
+ 1,60103	+ 1,66507
0,09742	0,11029
1,69845	1,77536

$$\begin{array}{rcl}
 13 \text{ lat} & - & 4\frac{1}{2}\%_0 - 1,77536 \\
 12 \text{ lat} & - & 4\frac{1}{2}\%_0 - 1,69845 \\
 1 \text{ rok} & - & 4\frac{1}{2}\%_0 - 0,07691 \\
 \frac{1}{4} \text{ roku} & - & 4\frac{1}{2}\%_0 - 0,01923 \\
 \frac{3}{4} \text{ roku} & - & 4\frac{1}{2}\%_0 - 0,05768 \\
 12 \text{ lat} & - & 4\frac{1}{2}\%_0 - 1,69845 \\
 12\frac{3}{4} \text{ lat} & - & 4\frac{1}{2}\%_0 - 1,75613
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl}} \right\} +$$

$$\text{więc } K_{12,75} = 1000 \cdot 1,75613$$

$$K_{12,75} = \text{Zł } 1756.13 \text{ (jak poprzednio).}$$

W przypadku, gdzie jak wyżej szukamy wartości dla $\frac{1}{2}\%$, możnaby ją określić, jako średnią arytmetyczną wartości odczytanych z tablicy. Np. dla 12 lat i $4\frac{1}{2}\%$ możnaby wyliczyć także:

$$\begin{array}{rcl}
 4\%_0 & - & \left\{ \begin{array}{l} 1,60103 \\ 1,79586 \end{array} \right. \\
 5\%_0 & - & +
 \end{array}$$

$$3,39689 : 2 = 1,69845 \text{ dla } 12 \text{ lat i } 4\frac{1}{2}\%_0 \text{ (j. w.)}$$

We wszystkich przykładach obliczaliśmy wartości czynników drogą dodawania poprawek do wartości dolnych. Możnaby otrzymać te same rezultaty odejmując odpowiednie poprawki od wartości górnych.

A więc po upływie jednego (osiemnastego) roku wartość czynnika wzrosła o

$$\begin{array}{r} - 2,02582 \\ 1,94790 \\ \hline 0,07792 \end{array}$$

Żeby wartość jego wzrosła tylko do wartości 2, t. j. o

$$\begin{array}{r} - 2,00000 \\ 1,94790 \\ \hline 0,05210 \end{array}$$

$$\text{potrzeba na to: } 1 \times \frac{0,05210}{0,07792} = 0,668 \text{ roku}$$

Wobec tego kapitał oddany na 4% podwaja się po

$$17 + 0,668 = 17,668 \text{ l.}$$

czyli po **17 l. 8 mies.**

Zastosowana w powyższych 5 przykładach zasada proporcjonalności, choć nie daje rezultatów zupełnie ścisłych, (zakładamy proporcjonalność, która wcale nie zachodzi), jest zupełnie wystarczająca w praktycznych wyliczeniach.

Przykład 7. Jaki kapitał wyniósł przy 5% Zł 6000.— po upływie 15 lat?

W tym wypadku szukamy kapitału początkowego, więc

$$K = \frac{K_n}{r^n}; \quad K = \frac{6000}{r^{15}} = \frac{6000}{2,07893} = \text{Zł } 2886,12.$$

Ponieważ dzielenie przez czynnik r nie jest dogodne, zastępujemy je mnożeniem przez $\frac{1}{r} = v$. Ten nowy czynnik v nazywa

się czynnikiem dyskontującym, ponieważ przy jego pomocy dyskontujemy wartość końcową kapitału, poszukując wartości początkowej. Wartości tego czynnika są podane w tablicy II. Ponieważ wartość czynnika r wzrasta z czasem i z stopą procentową, wartość czynnika v będzie maleć, jako odwrotność poprzedniego. W naszym przykładzie, korzystając z II. tablicy, otrzymamy $K = 6000 \cdot 0,48102 = \text{Zł } 2886,12$.

W wyrażeniu $K = \frac{K_n}{r^n}$ zastępujemy $\frac{1}{r^n}$ przez v^n i otrzymujemy

wzór

$$K = K_n \cdot v^n.$$

Gdy będziemy mieli do czynienia z wartościami dla stopy lub czasu ułamkowego można stosować jak poprzednio zasadę proporcjonalności, z tą różnicą, że poprawki będziemy odejmować od wartości dolnych, lub dodawać do górnych.

Przykład 8. Rozwiązanie przykładu 5. przy pomocy czynnika v .

Ze wzoru: $K = K_n \cdot v^n$; $1000 = 2500 \cdot v^n$; $v^n = 0,4$.

W tabelcy II. odczytujemy wartości sąsiednie: dla 2% — 0,50003 dla 3% — 0,35538. Wzrost stopy o 1% spowodował spadek wartości czynnika o

$$\begin{array}{r} 0,50003 \\ - 0,35538 \\ \hline 0,14465 \end{array}$$

Od wartości dolnej do danej spadek wynosi

$$\begin{array}{r} 0,50003 \\ - 0,40000 \\ \hline 0,10003 \end{array}$$

zmiana 0,14465 odpowiada 1% skąd $x\% = \frac{1 \times 0,10003}{0,14465}$; $x = 0,61\%$.

Żądana stopa jest $2 + 0,61 = 2,61\%$ jak w przykładzie 5.

Według dwóch podanych wzorów będziemy przeprowadzać obliczenia dla liczby okresów do 50 włącznie, rozporządzając tablicami podanymi na końcu książki. Gdyby jednak zaszła potrzeba zastosowania czynnika r lub v w potęgze wyższej od 50, należałoby skorzystać z pomocniczego przekształcenia:

dla liczby okresów $t > 50$

$$\begin{array}{l} r^t = r^{50} \cdot r^{t-50} \\ \text{oraz} \\ v^t = v^{50} \cdot v^{t-50} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Np. weźmy } p = 4\% & t = 80, \text{ w takim razie} \\ r^{80} = r^{50} \cdot r^{30} & v^{80} = v^{50} \cdot v^{30} \\ = 7,10668 \times 3,24340 & = 0,14071 \times 0,30832 \\ r^{80} = 23,04882 & v^{80} = 0,04338 \end{array}$$

Zadanie 1. Złożono w banku Zł 100.000.— przy 4% na procent składany i na początku czwartego roku podniesiono Zł 50.000.—. Ile pozostało na rachunku po upływie 7 lat?

Rozwiązanie można przeprowadzić dwiema drogami:

1) obliczyć do jakiej kwoty wzrośnie kapitał 100.000.— do początku czwartego roku, czyli po 3-ch latach (do chwili wycofania sumy 50.000.—), następnie potrącając tę sumę, resztę oprocentować na dalsze cztery lata t.j. do końca 7 roku.

2) sprowadzić obydwie sumy do tego samego terminu t.j. do końca 7. roku. Zamiast wycofać więc 50.000.— po 3 latach odliczamy tę sumę wraz z odsetkami za pozostałe 4 lata, dopiero po 7 latach, od kwoty do jakiej wzrośnie 100.000.— po 7 latach. Obydwa sposoby dadzą oczywiście ten sam wynik. Jednak drugi sposób jest prostszy do wyliczenia, o czym łatwo przekonać się można.

$$\begin{aligned} \text{Podług 1): } 100000 \cdot r^3 &= 100000 \cdot 1,12486 = 112486.— \\ 112486 - 50000 &= 62486; 62486 \cdot r^4 = 62486 \cdot 1,16986 = \\ &\quad \text{Zł 73100.—} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Podług 2): } 100000 \cdot r^7 &= 100000 \cdot 1,31593 = 131593.— \\ 50000 \cdot r^4 &= 50000 \cdot 1,16986 = 58493.— \\ &\quad \text{Zł 73100.—} \end{aligned}$$

Zadanie 2. Pewien rachunek w banku przedstawiał się następująco: przy otwarciu wpłacono Zł 80.000.—, po trzech latach wycofano Zł 50.000.—, po czterech latach od dnia wpłaty włożono Zł 20.000.—, po siedmiu latach wycofano Zł 60.000.—. Ile pozostało na rachunku na początku dziesiątego roku, jeżeli bank oprocentowuje wkłady po 4%?

Zadanie 3. Dług oddany przy 3% wynosił po 10 latach 2 miesiącach Zł 120.000.—. Ile należałoby zapłacić, wyrównując ten dług już po 4 latach?

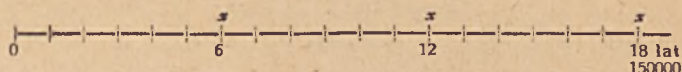
(Odp. Zł 100.009.— dyskonto za 6 lat i 2 m.).

Zadanie 4. Ktoś pożyczył Zł 100.000.— z tem, że spłaci Zł 30.000.— po 3 latach, Zł 40.000.— po 6 latach i resztę po 9 latach. Ile wyniosła reszta, gdy liczone 4%?

(Sprowadzamy na koniec 9. roku Odp. Zł 59377.—).

Zadanie 5. Dług, który przy $3\frac{1}{8}\%$ wynosił po 18 latach Zł 150.000.— spłacono trzema równymi ratami, po 6, 12 i 18 latach płatnemi. Określić wysokość raty.

Rozwiązanie: oznaczmy przez x wysokość raty i przedstawmy przebieg spłaty długu na rysunku:



Ponieważ suma rat musi równać się wysokości długu w tym samym terminie, możemy napisać

$$150000 = xr^{12} + xr^6 + x; \quad x = \frac{150000}{r^{12} + r^6 + 1}$$

skąd określimy x . Można by sprowadzić rozwiązanie do innego terminu np. chwili zaciągnięcia długu. Tutaj jednak ze względu na to, że w końcu 18. roku płacimy ratę i wartość długu jest określona w końcu tegoż roku, termin ten jest najdogodniejszym.

Zadanie 6. Sumę Zł 150.000.— zaciągniętą przy 2,4% na procent składany zaproponowano spłacić dwoma sposobami: 1) albo drogą dwóch równych rat, płatnych po 3 i 5 latach; 2) albo płacąc na początku 4. i na początku 5. roku po 80.000.—. Określić wysokość raty w wypadku 1. i obliczyć, które warunki są korzystniejsze dla dłużnika.

(Odp. Zł 82.422.—, drugie).

Zadanie 7. Dług, który po latach 20 przy 3,8% rocznie wynosił Zł 300.000.— został spłacony drogą trzech rat. Z nich pierwsza płatna po 5 latach wynosiła Zł 60.000.—, druga — płatna po 10 latach Zł 70.000.—. Czy korzystniej byłoby zapłacić po 15 latach 80.000.—, czy trzecią przypadającą ratę? (Odp. korzystniej zapłacić ratę, która wynosi Zł 77.321.—).

Zadanie 8. Dług, wynoszący po 7 latach i 3 miesiącach przy 3% Zł 120.000.— spłacono trzema ratami, z których dwie równe były płatne po 4 i 6 latach, a trzecia w dniu spłaty całego długu wynosiła Zł 20.000.—. Określić wysokość 1. raty. (Odp. Zł 46.759.—).

Zadanie 9. Dług Zł 200.000.— umorzono przy 3% 8 ratami rocznymi, z których cztery pierwsze były dwa razy mniejsze niż cztery następne. Określić wysokość tych rat. (Odp. Zł 19.377.—).

Zadanie 10. Czy kapitał szybciej potroi się przy 3%, czy podwoi przy 2%?

Zadanie 11. Zaciągnięto pożyczkę Zł 10.000.— przy 3% półrocznie z warunkiem spłacenia jej w trzech ratach, płatnych po 2 l. 3 mies., po $3\frac{1}{2}$ l. i 5 l., przyczem każda rata miała być dwa razy mniejsza od poprzedniej. Ile wynosiła 1. rata?

(Odp. Zł 6.811.44).

Zadanie 12. Zaciągnięto pożyczkę Zł 10.000.— przy $3\frac{1}{2}\%$, zobowiązując się spłacić ją trzema ratami, płatnymi po 18, 28 i 38 latach. Pierwsza z tych rat wynosiła Zł 3.000.—, druga — Zł 7.000.—. Określić wysokość trzeciej raty.

Zadanie 13. Dłużnik może uiścić się z zobowiązania dwójako: albo płacąc przy 5% po $14\frac{1}{2}$ latach Zł 8.000.—, albo płacąc przy $3\frac{1}{2}\%$ Zł 4.000.— po 20 latach i Zł 6.000.— po 30 latach. Która propozycja jest dlań obecnie korzystniejsza i o ile?

(Odp. druga o Zł 237).

Zadanie 14. W jakim czasie kapitał Zł 4.000.— przyniesie Zł 2.000 odsetek składanych przy 4% rocznie?

Zadanie 15. Kapitalista złożył do banku Zł 20.000.— przy 1% kwartalnie. Po 14 latach wycofał Zł 30.000.—, które podzielił na trzy równe części i umieścił pierwszą na $5\frac{1}{2}\%$, drugą na 3%, trzecią na $4\frac{1}{2}\%$. Po 10 latach zlikwidował swoje interesy. Ile pieniędzy otrzymał i ile zarobił wzgl. stracił na tej kombinacji?

Zadanie 16. Po jakim czasie przy 3% półrocznie stosunek kapitału początkowego do końcowego wynosi 0,1?

(Odp. 77,9 półr.).

Zadanie 17. Złożono do banku Zł 5.000.— na 4% rocznie. Po 10 latach wycofano Zł 7.000.—. Po dalszych 10 latach wpłacono Zł 3.000.— i wreszcie po pewnym czasie zlikwidowano rachunek, odbierając Zł 7.000.—. Określić ten czas.

Zadanie 18. Kapitalista miał otrzymać za lat dziesięć Zł 100.000.—. Tymczasem sprzedał swą pretensję, licząc 4% rocznie i część otrzymanego kapitału umieścił na 5% rocznie, która po 5 latach przyniosła mu wraz z odsetkami Zł 10.000.—, za Zł 50.000.— nabył dom, a resztę wydał na odnowienie tego domu. Ile kosztował remont domu?

Zadanie 19. Wypożyczono Zł 25.000.— przy 4% rocznie z warunkiem spłacenia tej sumy trzema ratami, płatnymi po 5, 12 i 19 latach, przyczem pierwsze dwie raty miały wynosić po Zł 15.000.—. W terminie płatności trzeciej raty dłużnik zaproponował Zł 6.500.—. Ile mógłby zarobić na tej zamianie?
(Odp. Zł 457.—).

Zadanie 20. Zamiast spłacić Zł 26.533.— po 20 latach, uiszczono ten dług trzema równymi ratami, płatnymi na początku 8. roku, w połowie 11. roku i w końcu 14. roku przy 4½%. Określić te raty.

Zadanie 21. Wierzytelność wartości Zł 50.000.— sprzedano na 10½ lat przed terminem płatności, licząc 5%. Obliczyć dyskonto złożone i handlowe.

Zadanie 22. Miasto ma 25.000 mieszkańców. Ile mieszkańców będzie liczyło po 20 latach, jeśli przyrost ludności wynosi 2% rocznie.

Zadanie 23. Kasa oszczędności oprocentowała wkład Zł 150.000.— na 3½% półrocznie, wypożyczając go jednocześnie przy 2½% kwartalnie. Obliczyć zysk kasy po 15 latach.

Zadanie 24. Po ilu latach kapitał Zł 3.513.— będzie wynosił tyle, ile kapitał Zł 5.000.— po 16 latach przy 4% rocznie?

Zadanie 25. Pewien okrąg leśny obliczono na 750000 m.³ drzewa. Wiele drzewa zawierał ten las przed 15 laty, przy rocznym przyroście 3½%.

2. Stopa dostosowana względna i bezwzględna.

Gdy procent do kapitału dolicza się nie co rok, lecz co pół roku, co kwartał lub co miesiąc, to, jak widzieliśmy, kapitalizacja taka nie wpływa na zmianę postaci wzorów już podanych, jeżeli przyjąć, że n oznacza liczbę półroczy, kwartałów lub miesięcy przy danej odpowiednio stopie półrocznej, kwartalnej lub miesięcznej.

Przykład 9. Jaka będzie końcowa wartość kapitału Zł 1000.— oddanego na 10 lat; a) przy rocznej kapitalizacji 8%, b) półrocznej — 4%, c) kwartalnej — 2%.

Rozwiązanie: a) $K_{10} = 1000 \cdot r^{10} = 1000 \cdot 2,15893 = \text{Zł } 2158.93^*)$

b) $K_{20} = 1000 \cdot r^{20} = 1000 \cdot 2,19112 = \text{Zł } 2191.12$

c) $K_{40} = 1000 \cdot r^{40} = 1000 \cdot 2,20804 = \text{Zł } 2208.04$

Z powyższego widzimy, że stosowaliśmy stopę procentową coraz to większą, gdyż rezultaty są coraz większe. Stopa procentowa tak dobrana nazywa się stopą dostosowaną względną albo nominalną. Postarajmy się wynaleźć stopę, któraby bez względu na rodzaj kapitalizacji dała te same rezultaty.

Jeżeli ogólnie liczba lat jest n , to półroczy $2n$, kwartałów $4n$, miesięcy $12n$, m okresów — mn . A więc, gdy $K_n = K \cdot r^n$, to

$$K_{mn} = K r_m^{mn}$$

ponieważ żądamy, aby $K_{mn} = K_n$, musi zachodzić równość

$$K r_m^{mn} = K r^n \text{ lub } r_m^{mn} = r^n \quad |$$

$$r_m = \sqrt[m]{r};$$

$$\text{uwzględniając } r_m = 1 + i_m \text{ oraz } i_m = \frac{p_m}{100},$$

$$\text{otrzymamy } 1 + \frac{p_m}{100} = \sqrt[m]{r} \text{ i ostatecznie}$$

$$p_m = 100 \left[\sqrt[m]{r} - 1 \right]$$

dla stopy półrocznej:	dla stopy kwartalnej:
$m = 2 \text{ i } p_{\text{półr.}} = 100 (\sqrt{r} - 1)$	$m = 4 \text{ i } p_{\text{kwart.}} = 100 (\sqrt[4]{r} - 1)$

wobec tego

stopa półroczna:	stopa kwartalna:
$p_{\text{półr.}} = 100 (\sqrt{1,08} - 1)$ $= 100 (1,0392 - 1)$ $p_{\text{półr.}} = 3,9230\%$	$p_{\text{kwart.}} = 100 (\sqrt[4]{1,08} - 1)$ $= 100 (1,0194 - 1)$ $p_{\text{kwart.}} = 1,9426\%$

Tak obliczana stopa nazywa się stopą dostosowaną bezwzględną lub rzeczywistą.

*) Z tablicy dla 8%.

Powyżej obliczoną stopę dostosowaną bezwzględną możemy określić jeszcze w przybliżeniu na podstawie tablic, stosując następujące rozumowanie: przy kapitalizacji rocznej jednostka kapitału stanowi po roku r jednostek; gdy zaś podzielimy ten rok na m okresów oprocentowania, to wartość jednostki kapitału po roku, t. j. po tych m okresach będzie

$$r_m^m = r$$

Wobec tego w tablicy I. w wierszu dla m okresów szukamy sąsiednich wartości czynnika oprocentowującego, odpowiadających czynnikowi r i przy pomocy interpolacji obliczamy przybliżoną stopę dostosowaną bezwzględną.

Np., gdy stopa roczna jest 8%, to

1) dla stopy półrocznej $m = 2$; $r_{\text{półr.}}^2 = 1,08$ i w/g tablicy I.

n	3%	4%
2	1,0609	1,0816

$$\frac{1,0816 - 1,0800}{1,0609 - 1,0600} = \frac{0,0191}{0,0207} = 0,9227$$

$$3 + 0,9227 = 3,9227\%$$

$$p_{\text{półr.}} = 3,9227\%$$

2) dla stopy kwartalnej

$m = 4$; $r_{\text{kwart.}}^4 = 1,08$ i w/g tabl. I. analogicznie

$$p_{\text{kwart.}} = 1,9419\%$$

Powyższy sposób daje w tym wypadku różnicę z wynikiem dokładnym dopiero w trzecim znaku za przecinkiem, jest więc zupełnie wystarczający w praktyce.

Gdyby chodziło o zagadnienie odwrotne, polegające na obliczeniu rocznej stopy bezwzględnej dostosowanej do stopy dla okresu równego $\frac{1}{m}$ roku, wówczas podany wzór

$$p_m = 100 \left(\sqrt[m]{r} - 1 \right)$$

przekształcamy, określając p :

$$\sqrt[m]{r} = \frac{p_m + 100}{100}$$

$$= \frac{p_m}{100} + 1$$

$$= r_m;$$

$$r = r_m, \text{ ponieważ } r = \frac{p}{100} + 1, \text{ więc}$$

$$p = 100 (r_m - 1)$$

dla stopy półrocznej 4%		dla stopy kwartalnej 2%
$m=2; p = 100 \times (1,04^2 - 1)$		$m=4; p = 100 \times (1,02^4 - 1)$

Wobec tego z tablicy I. stopa roczna

$$p' = 8,16\%$$

|

$$p'' = 8,243\%$$

W obu wypadkach roczna stopa dostosowana względna wynosiłaby 8%.

ROZDZIAŁ II.

Średni termin.

Jeżeli dług, który można było spłacić ratami w różnych terminach należy spłacić w całości, ustalamy taki termin spłaty, aby ani wierzyciel, ani dłużnik nie poniósł szkody. Taki termin nazywa się *średnim*. Wyznamy go wówczas, gdy porównamy w tej samej chwili zobowiązania dłużnika z pretensjami wierzyciela. Najdogodniej porównanie to uczynić w momencie zaciągania długu, albo w chwili płatności ostatniej raty.

Przykład 10. Należy zapłacić Zł 5000.— po 4 latach, Zł 7000.— po 6 latach i Zł 8000.— po 8 latach. Po jakim czasie można wyrównać cały dług, t.j. Zł 20000.— przy 5%?

a) wartość dzisiejsza

I. raty będzie	$5000 \cdot v^4 = 5000 \times 0,82270 = 4113.50$
II. „ „	$7000 \cdot v^6 = 7000 \times 0,74621 = 5223.47$
III. „ „	$8000 \cdot v^8 = 8000 \times 0,67684 = 5414.72$
wszystkich rat	14751.69

Ta wartość jest jednocześnie dzisiejszą wartością całego długu Zł 20000.— Zatem

$$14751,69 = 20000 \cdot v^x$$

$$v^x = 0,73758$$

i na zasadzie proporcjonalności

$$x = 6,243 \text{ lub}$$

$$x = 6 \text{ lat } 2 \text{ mies. } 27 \text{ dni}$$

b) wartość w końcu 8-go roku

I. raty będzie	5000	$\cdot r^4$	$= 5000 \cdot 1,21551$	$= 6077.55$
II. „ „	7000	$\cdot r^2$	$= 7000 \cdot 1,10250$	$= 7717.50$
III. „ „	8000			$= 8000.—$
wszystkich rat				$= 21795.05$

jest jednocześnie wartością całego długu Zł 20000.— w tym samym czasie. W takim razie

$$20000 \cdot r^{8-x} = 21795.05$$

$$r^{8-x} = 1,08975 \text{ skąd}$$

$$8 - x = 1,757$$

$$x = 6,243 \text{ jak poprzednio.}$$

Przykład 11. Ktoś ma zapłacić Zł 5000.— po 4 latach przy 4%, Zł 7000.— po 6 latach przy 3%, Zł 8000.— po 8 latach przy 5%. W jakim czasie mógłby uiścić się z długu odrazu?

Szukamy dzisiejszej wartości wszystkich rat:

I.	5000	$\cdot v^4$	$= 5000 \cdot 0,85480$	$= 4274.—$
II.	7000	$\cdot v^6$	$= 7000 \cdot 0,83748$	$= 5862.36$
III.	8000	$\cdot v^8$	$= 8000 \cdot 0,67684$	$= 5414.72$
				<u>15551.08</u>

Rozumując, jak w poprzednim przykładzie, mamy

$$15551.08 = 20000 \cdot v^x \quad (1)$$

Do rozwiązania tego równania brak nam stopy procentowej. Aby ją określić, obliczamy wartość rat po 8 latach.

I.	5000	$\cdot r^4$	$= 5000 \cdot 1,16986$	$= 5849.30$
II.	7000	$\cdot r^2$	$= 7000 \cdot 1,06090$	$= 7426.30$
III.	8000			$= 8000.—$
				<u>21265.60</u>

$$\text{czyli } 21265.60 = 20000 \cdot r^{8-x} \quad (2)$$

Widzimy, że dzisiejsza wartość długu 15551.08 wzrosła po 8 latach do 21265.60. Ze wzoru $K_n = K \cdot r^n$ określimy stopę procentową, którą mamy zastosować przy spłacie długu w jednym terminie.

W wierszu dla 8 lat mamy: przy 4% — 1,36857
 „ 3% — 1,26677

skąd podług zasady proporcjonalności szukana stopa będzie 3,99% (można było rozwiązać także przy pomocy czynnika v). Wreszcie określamy czas przy znalezionej stopie procentowej z równania (1) lub (2), np. pg. (1) $v^x = 0,77755$ wypośrodkowujemy z 4 wartości tablicy II.

	3 %	4 %
6 l.	0,83748	0,79031
7 l.	0,81309	0,75992

6 l. — 3,99% — 0,79078

7 l. — 3,99% — 0,76045 stąd $x = 6,436$ lub $x = 6$ lat 5 mies. 7 dni

Do tego samego wyniku doszlibyśmy, wychodząc z równania (2).

Zadanie 26. Pewien dług miał być umorzony drogą spłaty Zł 4000.— po 4 latach i Zł 6000.— po 7 latach. Tymczasem spłacono po 2 latach Zł 5000.—. Kiedy należy uiścić resztę w kwocie Zł 5000.— przy 4%?

(Odp. po 10 latach, 2 mies. 1 dniu).

Zadanie 27. Ktoś zobowiązał się zapłacić dług 3 ratami po Zł 4000.— każda, płatnemi co drugi rok przy 1% kwartalnie. W jakim czasie mógłby uiścić się z tego zobowiązania od razu?

(Odp. 3 lata, 11 mies. 11 dni).

Zadanie 28. Znaleźć średni termin następujących zobowiązań: 1) Zł 50.000.— płatne natychmiast, 2) Zł 40.000.— po 10½ latach, 3) Zł 60.000.— po 15 latach, jeżeli liczono 1% kwartalnie.

Zadanie 29. Warunki kupna majątku ziemskiego były następujące: Zł 250.000.— gotówką, Zł 150.000.— po 5 latach i Zł 100.000.— po 10 latach przy 4% półrocznie. Tymczasem nabywca zapłacił Zł 200.000.— gotówką. Kiedy powinien zapłacić resztę w kwocie Zł 300.000.—?

Zadanie 30. Dłużnik zobowiązał się spłacić zobowiązanie w dwóch ratach po Zł 8.000.— każda, płatnych po 3 i 6 latach przy 2% kwartalnie. W terminie płatności pierwszej raty dłużnik nie zapłacił nic, prosząc o wyznaczenie wspólnego terminu dla obu rat. Określić ten termin, licząc 1% miesięcznie.

(Odp. 11,23 mies.).

ROZDZIAŁ III.

Kapitalizacja wkładek.

1) Wkłádki wnoszone na początku każdego okresu.

Jeżeli, uwzględniając okresy roczne, na początku każdego roku wpłacać będziemy do banku jednostkę kapitału przy $i^0/0$,

to kapitał 1 wniesiony na początku I. r. wyniesie r w końcu I. roku

$r + 1$	"	"	"	II. "	"	$r^2 + r$	"	II. "
$r^2 + r + 1$	"	"	"	III. "	"	$r^3 + r^2 + r$	"	III. "
.....								
$r^{n-2} + \dots + r + 1$	"	"	"	$n-1.$	"	$r^{n-1} + \dots + r^2 + r$	"	$n-1.$
$r^{n-1} + \dots + r + 1$	"	"	"	$n.$	"	$r^n + r^{n-1} + \dots + r^2 + r$	"	$n.$

Jeżeli wkładka wynosić będzie k jednostek, to, składając je na początku każdego roku przez n lat, otrzymamy w końcu $n.$ roku

$$K = k (r^n + r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r^3 + r^2 + r)$$

$$\text{albo } K = kr (1 + r + r^2 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1})$$

Wyrażenie, stojące w nawiasie, jest sumą rosnącego postępu geometrycznego, którego $a_1 = 1$; $a_n = r^{n-1}$, $q = r$, wobec tego, stosując wzór na sumę, możemy napisać

$$K = k \cdot r \cdot \frac{r^{n-1} \cdot r - 1}{r - 1}, \text{ skąd}$$

$$K = kr \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Oznaczając wyrażenie $r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ przez S_n

$$\text{otrzymamy } K = k \cdot S_n$$

Czynnik $S_{n|}$ przedstawia wartość w końcu n . roku jednostek kapitału, składanych przez n lat na początku każdego roku i nazywa się czynnikiem kapitalizacyjnym.

Takie same rozumowanie stosujemy, gdy chodzi o okresy półroczne, kwartalne, miesięczne lub tygodniowe.

Ponieważ na zasadzie poprzedniego

$$S_{n|} = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n$$

wartość tego czynnika dla n lat można znaleźć, dodając pierwszych n wartości czynnika r (tablica I). Gdy $n=1$; $S_{1|} = r$; przy $n=2$; $S_{2|} = r + r^2$; przy $n=3$; $S_{3|} = r + r^2 + r^3$; przy $n=4$; $S_{4|} = r + r^2 + r^3 + r^4$ i t. d.

W ten sposób została sporządzona tablica III., podająca wartość czynników $S_{n|}$ dla kolejnych wartości czasu i różnych stóp procentowych.

Przykład 12. Jaki kapitał odbierzemy po 10 latach przy 4% rocznie, składając na początku każdego roku po Zł 500.—? Ze wzoru

$$\begin{aligned} K &= k \cdot S_{n|} \\ K &= 500 \cdot S_{10|} \\ K &= 500 \cdot 12,48635 \end{aligned}$$

i stosując tablicę III. $K = \text{Zł } 6243.18$

Przykład 13. Ile należy składać na początku każdego roku przez lat 7 przy 3%, aby zebrać kapitał Zł 10.000.— na koniec 7. roku.

$$\begin{aligned} 10000 &= k \cdot S_{7|} \\ k &= \frac{10000}{7,89234} \\ k &= \text{Zł } 1267.05. \end{aligned}$$

Przykład 14. W jakim czasie, składając po Zł 1000.— na początku każdego roku, zbierzemy Zł 150000.— przy 4%?

$$\begin{aligned} 150000. &= 1000 \cdot S_{x|} \\ S_{x|} &= 150. \end{aligned}$$

Znowu stosujemy zasadę proporcjonalności

48 lat — 144,83373	— 150,00000	5,16627	6 83335
49 „ — 151,66708	— 144,83373		0,75
1 rok — 6,83335	5,16627	$x = 48 + 0,75 = 48,75$	

$x = 48$ l. 9 mies.

Ponieważ otrzymaliśmy niepełną liczbę lat, ostatnia 49. wkładka procentuje nie cały rok, lecz 9 miesięcy, i nie wynosi Zł 1000.— lecz Zł 840.—. Wartość tę znajdujemy, odejmując od kapitału Zł 150000.— zdyskontowanego na koniec 48. roku, wartość 48 pełnych wkładek

$$150000 \cdot v^{0,75} = 150000 \cdot 0,97116 = 145674.—$$

$$1000 \cdot S_{\overline{48}|} = 1000 \cdot 144,83373 = 144834.—$$

$$\text{różnica} \quad . \quad . \quad 840.—$$

Przykład 15. Przy jakiej stopie procentowej można uzbierać Zł 6000.— przez lat 10, odkładając corocznie zgóry po Zł 500.—?

6000 = 500 · $S_{\overline{10} }$	4% — 12,48635
$S_{\overline{10} } = 12$	3% — 11,80780
	1% — 0,67855
12,48635	0,48635 0,67855
— 12,00000	0,72
0,48635	$x = 4 — 0,72 = 3,28\%$

Jeżeli kapitał K , uzbierany drogą n rocznych wkładek k , nadal pozostawimy na procent składany na lat m przy tejże stopie procentowej $p\%$, wówczas ostateczny kapitał $K_1 = K \cdot r^m$ albo, podstawiając wartość $K = k \cdot S_{\overline{n}|}$

$$K_1 = K \cdot S_{\overline{n}|} \cdot r^m$$

Ponieważ przy wyliczaniu trzeba będzie mnożyć przez siebie czynniki $s_{\overline{n}|}$ i r^m , które nigdy nie są liczbami okrągłymi, omijamy tę niedogodność w następujący sposób. Załóżmy mianowicie, że wkładki k były wpłacane przez lat $n + m$, a nie n , wtedy wartość ich po $n + m$ latach będzie $K_{n+m} = k \cdot S_{\overline{n+m}|}$. Od tego kapitału odejmiemy wartość w tym samym czasie m wkładek istotnie niewpłaconych, t.j. $K_{m,m} = k \cdot S_{\overline{m}|}$. W rezultacie otrzymamy wartość n wkładek, skapitalizowanych na koniec $n + m$ roku $K_1 = K_{n+m} - K_{m,m}$ lub

$$K_1 = k (S_{\overline{n+m}|} - S_{\overline{m}|})$$

Wogóle składając co rok zdołu k jednostek, otrzymamy w końcu n . roku

$$K^1 = k (r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \dots + r^2 + r + 1)$$

$$\text{albo } K^1 = k (1 + r + r^2 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1})$$

ponieważ $1 + r + r^2 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$ (patrz str. 28)

$$\text{otrzymamy } K^1 = k \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$\text{Wprowadźmy oznaczenie } \frac{r^n - 1}{r - 1} = S_{n|}^1,$$

$$\text{wówczas } K^1 = k \cdot S_{n|}^1$$

Czynnik kapitalizacyjny $S_{n|}^1$ przedstawia wartość w końcu n . roku jednostek kapitału, składanych przez n lat w końcu każdego roku. Dla czynników $S_{n|}^1$ nie układa się nowej tablicy, ponieważ tablica czynników $S_{n|}$ (tabl. III.) w zupełności wystarczy. Zwróćmy uwagę, że

$$S_{n|}^1 = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$$

Odejmując od obu stron równania po 1, otrzymamy

$$S_{n|}^1 - 1 = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$$

Prawa strona równania na zasadzie wywodów na str. 29. daje $S_{n-1|}$, wobec tego $S_{n|}^1 - 1 = S_{n-1|}$ albo ostatecznie

$$S_{n|}^1 = S_{n-1|} + 1$$

Na zasadzie tego wzoru przejścia szukając wartości czynnika S^1 dla lat n , bierzemy wartość czynnika S dla lat $n - 1$ (tabl. III.) i dodajemy 1*)

Jeżeli pomnożymy przez r obie strony równania

$$S_{n|}^1 = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$$

to otrzymamy

$$S_{n|}^1 \cdot r = r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n$$

albo

$$S_{n|}^1 \cdot r = S_{n|} \text{ i, uwzględniając } r = \frac{1}{v},$$

$$S_{n|}^1 = S_{n|} \cdot v$$

*) Gdyby dana była tablica wartości czynników $S_{n|}^1$, znajdujemy wartości czynników $S_{n|}$ ze wzoru przejścia $S_{n|} = S_{n+1|}^1 - 1$, który wprowadzamy z równania $S_{n|} = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n$, dodając do obu stron równania po 1.

Przykład 18. Jaki kapitał utworzą po 10 latach przy 4% wkładki Zł 500.— wnoszone co rok zdołu 10 razy?

$$K^1 = k \cdot S_{n|}^1 \text{ albo } K^1 = k (S_{n-1|} + 1).$$

Po podstawieniu otrzymamy $K^1 = 500 \cdot 12,00611$

$$K^1 = \text{Zł } 6003.06.$$

Biorąc te same dane liczbowe co w przykładzie 12. otrzymaliśmy wynik mniejszy. Zależność między rezultatami będzie oczywiście następująca: $6003,06 \cdot r = 6243.18$.

Przykład 19. Ile należy składać co rok zdołu przez lat 7 przy 3%, aby zebrać Zł 10000.—?

$$\begin{aligned} 10000 &= k \cdot S_{7|}^1 \\ k &= \frac{10000}{S_{6|} + 1} = \frac{10000}{7,66246} \\ k &= \text{Zł } 1305.06. \end{aligned}$$

(Dane liczbowe te same, co w przykładzie 13. Zależność wyników $1267.05 \cdot r = 1305.06$).

Przykład 20. W jakim czasie, składając Zł 1000.—, co rok zdołu, uzbierać można Zł 150000.— przy 4%?

$$150000 = 1000 S_{x|}^1; S_{x-1|}^1 = 150$$

Aby wyliczyć czas x przy pomocy tablicy III., musimy zastosować wzór przejścia $S_{n|}^1 = S_{n-1|} + 1$.

W naszym przykładzie $S_{x|}^1 = S_{x-1|} + 1$, skąd, ponieważ $S_{x-1|}^1 = 150$

$$\begin{aligned} S_{x-1|} + 1 &= 150 \\ S_{x-1|} &= 149 \end{aligned}$$

na zasadzie proporcjonalności:

49 l. — 151,66708	— 149,00000
48 l. — 144,83373	— 144,83373
6,83335	4,16627

$$4,16627 : 6,83335 = 0,61$$

$$x - 1 = 48,61$$

$$x = 49,61 \text{ lat.}$$

Przykład 21. Wnoszono do kasy przez lat 10 co rok zdołu po Zł 500.— i uzbierano Zł 6000.—. Jaką stopę procentową zastosowano?

$$6000 = 500 \cdot S_{10|}^1$$

$$S_{10|}^1 = 12$$

$$\text{wobec tego } S_{9|}^1 = 11$$

$$\text{i po obliczeniu } p = \underline{3,99\%}$$

Jeżeli, składając co rok zdołu wkładkę k przy $p\%$ przez n lat utworzymy kapitał K^1 , który pozostawimy nadal na procencie składanym przez m lat, to otrzymamy:

$$K^1 = K^1 \cdot S_{n|}^1 \cdot r^m$$

albo (p. str. 30)

$$K^1 = k (S_{n+m|}^1 - S_{m|}^1)$$

Ze względu na to, że nie posiadamy oddzielnej tablicy dla tych czynników, stosujemy wzory przejścia

$$S_{n+m|}^1 = S_{n+m-1|}^1 + 1$$

$$S_{m|}^1 = S_{m-1|}^1 + 1$$

i po podstawieniu ostatecznie otrzymamy:

$$K^1 = k (S_{n+m-1|}^1 - S_{m-1|}^1)$$

Przykład 22. Składano po Zł 1000.— corocznie zdołu przez lat 10 przy 4% , poczem pozostawiono utworzony w ten sposób kapitał jeszcze przez lat 5 na procencie składanym. Ile otrzymano?

Stosujemy wzór:

$$K^1 = k (S_{n+m-1|}^1 - S_{m-1|}^1)$$

$$\text{skąd } K^1 = 1000 (S_{10+5-1|}^1 - S_{5-1|}^1) \\ = 1000 (S_{14|}^1 - S_{4|}^1)$$

$$= \text{Zł } 14607.27.$$

Przykład 23. Inne rozwiązanie przykładu 17. Zastąpmy wkładki Zł 500.— wnoszone w środku roku, na wkładki, któreby były wpłacane corocznie zdołu. Wystarczy w tym celu przesunąć termin płatności każdej wkładki o pół roku naprzód, a więc uwzględnić procent za półrocze. Otrzymamy wtedy:

$$500 \cdot r^{0,5} = 500 \cdot 1,02 = 510.—$$

Mamy wobec tego do czynienia z 12 wkładkami po Zł 510.— płatnemi co rok zdołu. Możemy je skapitalizować przy pomocy wzoru:

$$\begin{aligned} K^1 &= k \cdot S_{n|}^1 \\ \text{skąd } K^1 &= 510 \cdot S_{12|}^1 \text{ albo, stosując tablicę III.,} \\ K^1 &= 510 \cdot (S_{11|}^1 + 1) \\ K^1 &= 510 \cdot 15,02581 \\ &= \text{Zł } 7663.16. \end{aligned}$$

Wyniki obu rozwiązań różnią się o —.08 z powodu zastosowania stopy względnej zamiast bezwzględnej.

Ponieważ zamieszczone w książce tablice finansowe zawierają wartości czynników tylko dla pierwszych 50 okresów, możemy wyprowadzone wzory stosować tylko dla $n \leq 50$. Gdyby jednak zachodziła potrzeba obliczenia czynników kapitalizacyjnych dla $n > 50$, należałoby korzystać ze wzoru, który otrzymujemy drogą następującego przekształcenia:

Gdy tablica posiada wartości dla n okresów, a $t > n$ jest liczbą okresów danych, to

$$\begin{aligned} S_{t|}^1 &= r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + r^n + r^{n+1} + r^{n+2} + \dots + r^{t-1} + r^t \\ &= S_{n|}^1 + (r^{n+1} + r^{n+2} + \dots + r^{t-1} + r^t) \\ &= S_{n|}^1 + r^n (r + r^2 + \dots + r^{t-n-1} + r^{t-n}) \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$S_{t|}^1 = S_{n|}^1 + r^n \cdot S_{t-n|}^1$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} S_{t|}^{1-} &= 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n + r^{n+1} + r^{n+2} + \dots + r^{t-2} + r^{t-1} \\ &= S_{n|}^{1-} + (r^n + r^{n+1} + r^{n+2} + \dots + r^{t-2} + r^{t-1}) \\ &= S_{n|}^{1-} + r^n (1 + r + r^2 + \dots + r^{t-n-2} + r^{t-n-1}) \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$S_{t|}^{1-} = S_{n|}^{1-} + r^n \cdot S_{t-n|}^{1-}$$

Np. przy 5%

$$\begin{aligned} S_{90|} &= S_{50|} + r^{50} \cdot S_{40|}^1 = 1674, 33766 \\ S_{60|}^{1-} &= S_{50|}^{1-} + r^{50} \cdot S_{10|}^{1-} = 353, 58370 \end{aligned}$$

Zadanie 31. Ktoś składał do kasy oszczędności przez 7 lat w końcu każdego półrocza po Zł 10.000.— przy 2% półrocznie. Przez następne 7 lat wносił na początku każdego roku

po Zł 30.000.— przy 4% rocznie, i wreszcie na początku 19. roku wniósł pewną sumę również na 4% rocznie, tak aby z końcem 20. roku otrzymać Zł 600.000.—. Ile wynosiła jednorazowa wpłata?

(Odp. Zł 19.497.40).

Zadanie 32. Wpłacano po Zł 10.000.— w środku roku przez 5 lat przy 5% i po Zł 5.000.— w końcu każdego półroczia przez następne lata przy 3%. Jaki był stan rachunku po 7½ latach?

Zadanie 33. Dług Zł 100.000.— został umorzony:

a) przez wpłacanie, poczynszy od 5. roku corocznie zdołu po Zł 10.000.— przez lat 3.

b) przez wnoszenie przez następnych lat 7 corocznie zgóry po Zł 14.000.—.

c) [przez wpłacenie jednorazowo reszty na początku 16. roku.

Ile wtedy wpłacono, licząc 3%?

(Odp. Zł 2.834.86).

Zadanie 34. Ojciec, chcąc zapewnić 10-letniemu synowi fundusz na studia, wpłacił jednorazowo Zł 1.000.— i następnie w końcu każdego półroczia powiększał tę sumę o Zł 100.—. Ile syn otrzyma po ukończeniu 19. roku życia, jeżeli bank oprocentowuje wkłady po 3% półrocznie?

(Odp. Zł 4.043.87).

Zadanie 35. Dług Zł 25.000.— należy spłacić przy 4% półrocznie w ciągu 12,5 lat ratami półrocznymi zdołu, z których każde 5 kolejnych rat jest dwa razy większe od poprzednich 5. Ile wynosi pierwsza i ostatnia rata?

(Odp. Zł 123.26 i Zł 1.972.16.).

Zadanie 36. Z kapitału Zł 20.000.—, oddanego na procent składany przy 5%, pobieramy co rok z dołu Zł 2.000.—.

a) ile pozostanie po 5 latach?

b) kiedy wyczerpiemy kapitał?

(Odp. a) Zł 14.474.34, b) 14,211 lat).

Zadanie 37. Aby spłacić dług $\text{Zł } 20.000.—$, zaciągnięty przy $5\frac{1}{2}\%$, składano półrocznie z dołu przy 3% półrocznie po $\text{Zł } 300.—$, płacąc w ciągu tego czasu oddzielnie bieżące odsetki. Po $10\frac{1}{2}$ latach zaokrąglono uzbieraną sumę wzwyż do najbliższego pełnego tysiąca, przeznaczając ją na spłatę części długu, poczem umorzono resztę długu dwiema ratami płatnymi co 2 lata przy $5\frac{1}{2}\%$ rocznie. Określić rozmiar tych rat.

(Odp. $\text{Zł } 6.450.—$).

Zadanie 38. Składano w banku po $\text{Zł } 4.000.—$ corocznie zdołu przez 5 lat oraz po $\text{Zł } 5.000.—$ corocznie zgóry przez dalsze 5 lat. Na początku 16. roku wycofano $\text{Zł } 40.000.—$. Kiedy będzie można podjąć $\text{Zł } 40.000.—$ po raz drugi, licząc $3\frac{1}{2}\%$ rocznie?

(Odp. przeszło 15 lat).

Zadanie 39. Jak długo należy składać przy 5% rocznie po $\text{Zł } 1.000.—$ w połowie każdego roku, aby uzbierać kapitał $\text{Zł } 20.000.—$ i ile wynosić będzie ostatnia niepełna wkładka?

Zadanie 40. Wpłacano do banku po $\text{Zł } 500.—$ miesięcznie zdołu przez cztery lata, a nadto wniesiono jednorazowo $\text{Zł } 10.000.—$ na początku trzeciego roku. Jakie było saldo rachunku po czterech latach, jeżeli bank dopisywał 1% miesięcznie?

Zadanie 41. Celem uzbierania $\text{Zł } 50.000.—$ złożono w banku jednorazowo $\text{Zł } 10.000.—$, a następnie wnoszono corocznie zdołu po $\text{Zł } 5.000.—$. Ile było wkładek całkowitych, jeżeli bank liczył 5% rocznie?

(Odp. sześć).

3) Zamiana wkładek.

Przypuśćmy, że wkładkę roczną k , wnoszoną w końcu roku, chcemy zastąpić m ratami. Wówczas wartość końcowa m rat, wnoszonych w ciągu roku musi równać się wkładce k . Oznaczmy wysokość takiej raty przez x i założmy, że będą one wnoszone zdołu. W takim razie

$$x \cdot S_{\overline{m}|}^1 = k$$

Gdyby raty miały być wnoszone zgóry, otrzymalibyśmy

$$x_{11} \cdot S_{m|} = k$$

Natomiast, gdy władkę k , wpłacaną corocznie zgóry, zastąpimy m ratami x , płatnemi zgóry, wówczas

$$x_m \cdot S_{m|} = k \cdot r$$

i gdyby raty płatne były zdołu

$$x_{111} \cdot S_{m|}^1 = kr.$$

We wszystkich tych wypadkach czynniki $S_{m|}$ i $S_{m|}^1$ powinny być obliczane przy zastosowaniu stopy dostosowanej bezwzględnej. Stosowana w praktyce stopa dostosowana względna da wyniki nieco mniejsze, jak to zobaczymy na przykładach.

Przykład 24. Ktoś zamierzał wnosić do kasy oszczędności co rok zdołu po Zł 1.000.— przy 4⁰/₀. Ile musiałby zamiast tego wpłacać co półrocze

a) zdołu, b) z góry?

Rozwiązanie: półroczną stopę dostosowaną bezwzględną dla rocznej 4⁰/₀ obliczamy ze wzoru (str. 22.)

$$p_{\text{otr.}} = 100 (\sqrt[2]{1,04} - 1)$$

Wynosi ona 1,98⁰/₀.

Wobec tego, odpowiadając na pytanie pod a)

$$\begin{aligned} 1) \quad x_i \cdot S_{12|} &= 1000 \\ x_i &= \frac{1000}{S_{12|} + 1} \\ &= 495.10 *) \end{aligned}$$

*) Nieścisłość, zresztą bardzo małą, spowodowaną zastosowaniem zasady proporcjonalności, można usunąć, rozwiązując przy pomocy logarytmów:

$$\begin{aligned} x \cdot S_{12|} &= 1000 \\ x \cdot \frac{r^2 - 1}{r - 1} &= 1000 \\ x &= \frac{1000 \cdot 0,0198}{(1,0198)^2 - 1} \\ \text{ponieważ } (1,0198)^2 &= 1,03999 \\ x &= 495.12. \end{aligned}$$

Różnica wyników 0,02.

Drogi tej nie stosujemy jednak z powodu zawyżonych wyliczeń.

2) Gdy zastosujemy stopę dostosowaną względną (półroczna 2% dla rocznej 4%) otrzymamy:

$$\begin{aligned}x^1 \cdot S_{2|}^1 &= 1000 \\x^1 &= \frac{1000}{S_{2|}^1 + 1} \\&= 495.05.\end{aligned}$$

b) przy wkładkach półrocznych, wnoszonych zgóry

1) stosując stopę dostosowaną bezwzględną

$$\begin{aligned}x_{''} \cdot S_{2|} &= 1000 \\x_{''} &= \frac{1000}{S_{2|}} \\&= 485.49.\end{aligned}$$

2) przy stopie dostosowanej względnej

$$\begin{aligned}x_{''}^1 \cdot S_{2|} &= 1000 \\x_{''}^1 &= \frac{1000}{S_{2|}} \\&= 485.34.\end{aligned}$$

Przykład 25. Ktoś zamierzał wnosić do kasy oszczędności co rok zgóry po Zł 1.000.— przy 4%. Ile mógłby zamiast tego wpłacać co pół roku: a) zgóry, b) zdołu?

a) Na zasadzie wzoru:

$$\begin{aligned}x_{'''} \cdot S_{m|} &= k \cdot r \\x_{'''} \cdot S_{2|} &= 1000 \cdot 1,04 \text{ t. j.}\end{aligned}$$

wartość dwóch wkładek półrocznych $x_{'''}$ w końcu roku musi równać się wkładce rocznej Zł 1000.— w końcu tegoż roku.

Stąd: 1) przy zastosowaniu stopy dostosowanej bezwzględnej 1,98%

$$\begin{aligned}x_{'''} &= \frac{1000 \cdot 1,04}{2,05979} \\&= 504.91.\end{aligned}$$

2) stosując stopę dostosowaną względną 2%

$$\begin{aligned}x_{'''}^1 &= \frac{1000 \cdot 1,04}{2,0604} \\&= 504.76.\end{aligned}$$

b) na zasadzie wzoru:

$$x_{III} \cdot S^1_{m|} = kr$$

$$x_{III} \cdot S^1_{2|} = 1000 \cdot 1,04$$

stad: 1) przy 1,98%

$$x_{III} = \frac{1000 \cdot 1,04}{2,0198}$$

$$= 514.90.$$

2) przy 2%

$$x^1_{III} = \frac{1000 \cdot 1,04}{2,02}$$

$$= 514.85.$$

Zadanie 42. Zamienić wkładki roczne Zł 1000.— składane zdołu przy 4% na kwartalne składane przy 1% a) zgóry, b) zdołu.

Zadanie 43. Zamienić wkładki kwartalne Zł 2.500.— składane zdołu przy 1% na roczne, składane zgóry przy stopie dostosowanej a) względnej b) bezwzględnej.

(Odp. a) 9761.—, b) 9755.—).

4) Wkładki zmienne.

Jeżeli zamiast dotychczas rozpatrywanych stałych wkładek k przyjmiemy wkładki k zwiększane lub zmniejszane co dany okres czasu o stałą różnicę δ w ciągu n okresów to, zakładając płatność zgóry, otrzymamy:

Okres	W K Ł A D K I	
	nieoprocentowane	oprocentowane
1.	k	$k \cdot r^n$
2.	$k \pm \delta$	$(k \pm \delta) \cdot r^{n-1}$
3.	$k \pm 2 \delta$	$(k \pm 2\delta) \cdot r^{n-2}$
4.	$k \pm 3 \delta$	$(k \pm 3\delta) \cdot r^{n-3}$
-	- - -	- - -
-	- - -	- - -
-	- - -	- - -
-	- - -	- - -
$n-1.$	$k \pm (n-2) \delta$	$[k \pm (n-2)\delta] \cdot r^2$
$n.$	$k \pm (n-1) \delta$	$[k \pm (n-1)\delta] \cdot r$

W ogólnej sumie, przedstawiającej wartość końcową K_n oddzielnie dodajemy wkładki zasadnicze k i oddzielnie różnice δ .

$$K_n = k(r^n + r^{n-1} + \dots + r^2 + r) \pm \\ \pm \delta [r^{n-1} + 2r^{n-2} + 3r^{n-3} + \dots + (n-2)r^2 + (n-1)r]$$

Oznaczmy przez Ω wyrażenie, stojące w drugim nawiasie; w takim razie

$$K_n = k \cdot S_{\overline{n}|} \pm \delta \cdot \Omega$$

Rozwińmy następnie Ω , jak następuje:

$$\begin{aligned} r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \dots + r^2 + r &= r \cdot \frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} \\ r^{n-2} + r^{n-3} + \dots + r^2 + r &= r \cdot \frac{r^{n-2} - 1}{r - 1} \\ r^{n-3} + \dots + r^2 + r &= r \cdot \frac{r^{n-3} - 1}{r - 1} \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ r^3 + r^2 + r &= r \cdot \frac{r^3 - 1}{r - 1} \\ r^2 + r &= r \cdot \frac{r^2 - 1}{r - 1} \\ r &= r \cdot \frac{r - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

Biorąc przed nawias $\frac{r}{r-1}$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{r}{r-1} [r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \dots + r^3 + r^2 + r - (n-1)] \\ \text{ale } r-1 &= \frac{p}{100} \text{ i } \sum_r^{r^{n-1}} r = S_{\overline{n-1}|}, \text{ więc} \\ &= \frac{100 \cdot r}{p} [S_{\overline{n-1}|} - (n-1)] \end{aligned}$$

Wobec tego

wartość skapitalizowana wkładek zmiennych płatnych zgóry

$$K_n = k \cdot S_{\overline{n}|} \pm \delta \cdot \frac{100 \cdot r}{p} [S_{\overline{n-1}|} - (n-1)]$$

Jeżeli równanie powyższe podzielić przez r , otrzymamy wartość skapitalizowaną wkładek zmiennych płatnych zdołu

$$K'_{1n} = k \cdot S'_{1n} + \delta \cdot \frac{100}{p} [S'_{1n-1} - (n-1)]$$

Zauważmy, że przy wkładkach malejących t.j. przy $\delta < 0$ δ nie może być dowolne, gdyż przy zbyt wielkiem δ wkładki mogłyby się stać ujemne, co w praktyce wyszłoby z czasem nie na wnoszenie wkładek, lecz na czerpanie z już włożonych. Teoretycznie taki wypadek jest możliwy i wówczas wzory podane można stosować bez ograniczenia o jakim niżej mowa. Gdy mówimy jednak tylko o wkładkach, to wszystkie muszą być dodatnie, a więc i najmniejsza z nich t.j. ostatnia

$$k - (n-1) \delta > 0$$

skąd

$$\delta < \frac{k}{n-1}$$

i wobec tego

$$\max. \delta = \frac{k}{n-1}$$

Przykład 26. Obliczyć kapitał uzbierany drogą rocznych wkładek malejących od sumy Zł 5000.— po Zł 250.— wnoszonych w ciągu 15 lat corocznie zdołu przy 4% rocznie.

Ponieważ $k = 5000$, $\delta = -250$, $p = 4$, $n = 15$, więc

$$K'_{15} = 5000 \cdot S'_{15} - 250 \cdot \frac{100}{4} [S'_{14} - 14]$$

ale

$$S'_{15} = 20,02359, \quad S'_{14} = 19,02359$$

wobec tego

$$K'_{15} = \text{Zł } 68.721. -$$

W danym razie

$$\begin{aligned} \max. \delta &= \frac{5000}{14} \\ &= \text{Zł } 357\frac{1}{4} \end{aligned}$$

ROZDZIAŁ IV.

Renty.

1) Płatność w końcu okresów.

Określmy wartość dzisiejszą wkładek k , wnoszonych przy $p\%$ w końcu każdego roku przez lat n . (Za okresy oprocentowania przyjmijmy lata, choć mogą być okresy inne).

Wówczas na podstawie wzoru

$$K = K_n \cdot v^n$$

Wartość dzis. l. wkładki wniesionej w końcu l. r. będzie kv

"	"	II.	"	"	"	II.	"	"	kv^2
"	"	III.	"	"	"	III.	"	"	kv^3
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
"	"	$n-1$	"	"	"	$n-1$	"	"	$k \cdot v^{n-1}$
"	"	n .	"	"	"	n .	"	"	$k \cdot v^n$

Sumując, otrzymamy wartość dzisiejszą n wkładek k :

$$W = kv + kv^2 + kv^3 + \dots + k \cdot v^{n-1} + kv^n$$

$$W = kv (1 + v + v^2 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1})$$

Wyrażenie, stojące w nawiasie jest sumą postępu geometrycznego malejącego, którego $a_1 = 1$; $a_n = v^{n-1}$; $q = v$; wobec tego

$$W = k \cdot v \frac{1 - v^{n-1} \cdot v}{1 - v}$$

$$W = k \cdot v \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

Wprowadźmy oznaczenie $v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} = a_{\overline{n}|}$ a wtedy

$$W = k \cdot a_{\overline{n}|}$$

Jeżeli kwota k będzie oznaczać sumę płatną corocznie zdołu przez instytucję finansową, to taką sumę będziemy nazywać rentą. Natomiast wartość dzisiejsza takiej renty W będzie kapitałem, który należy wpłacić jednorazowo, aby uzyskać prawo do wspomnianej renty. Ponieważ czas płatności renty jest tutaj ograniczony i wynosi n lat, mamy do czynienia z rentą czasową. Czynniki $a_{\overline{n}|}$ przedstawia dzisiejszą wartość jednostek kapitału, płatnych corocznie zdołu przez n lat i nazywa się czynnikiem rentowym.

Zauważmy, że:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + v^4 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n$$

A więc wartość czynnika $a_{\overline{n}|}$ można obliczyć, dodając pierwszych n wartości czynnika v (tabl. II)

$$\text{Gdy } n = 1; a_{\overline{1}|} = v$$

$$n = 2; a_{\overline{2}|} = v + v^2$$

$$n = 3; a_{\overline{3}|} = v + v^2 + v^3$$

i t. d.

W ten sposób jest ułożona tablica IV., podająca wartości czynników $a_{\overline{n}|}$ dla kolejnych wartości czasu i różnych stóp procentowych.

Ponieważ $a_{\overline{n}|}$ jest wartością dzisiejszą jednostek kapitału płatnych w końcu każdego roku, a $S^1_{\overline{n}|}$ ich wartością końcową, między czynnikami $a_{\overline{n}|}$ i $S^1_{\overline{n}|}$ istnieje zależność:

$$a_{\overline{n}|} \cdot r^n = S^1_{\overline{n}|}$$

$$\text{albo } a_{\overline{n}|} = S^1_{\overline{n}|} \cdot v^n$$

analogiczna do zasadniczych wzorów:

$$Kr^n = K_n$$

$$\text{i } K = K_n \cdot v^n.$$

Zależność tę wyprowadzimy z równania $a_{\overline{n}|} = v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}$,

dzieląc obie strony przez v^n i zastępując czynniki v przez $\frac{1}{r}$.

$$\frac{a_{\overline{n}|}}{v_{\overline{n}|}} = v \cdot \frac{\frac{1}{v^n} - 1}{1 - v}; \quad a_{\overline{n}|} \cdot r^n = \frac{1}{r} \cdot \frac{r^n - 1}{1 - \frac{1}{r}};$$

$$a_{\overline{n}|} \cdot r^n = \frac{r^n - 1}{r - 1}; \quad a_{\overline{n}|} \cdot r^n = S_{\overline{n}|}^1 \text{ c. b. d. o.}$$

Przykład 27. Za ile można nabyć prawo do renty, płatnej w kwocie Zł 1000.— co pół roku zdołu przez 10 lat, przy 3% półrocznie?

Na podstawie wzoru

$$W = k \cdot a_{\overline{20}|}$$

$$W = 1000 \cdot 14,87747$$

$$= \text{Zł } 14877.47.$$

Przykład 28. Wpłacono do banku Zł 20000.— [celem pobierania przez 15 lat renty, płatnej w końcu każdego roku. Jaki był rozmiar renty, gdy bank liczył 4%?

$$W = k \cdot a_{\overline{15}|}$$

$$20000 = k \cdot 11,11839$$

$$k = \frac{20000}{11,11839}$$

$$= \text{Zł } 1798.82.$$

Ponieważ dzielenie takie jest niedogodne, można je zastąpić mnożeniem przez odwrotność czynnika rentowego t. j. $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$. Wartości te są podane w tablicy V. W naszym przykładzie

$$k = W \cdot \frac{1}{a_{\overline{15}|}}$$

$$\text{i oczywiście } k = 20000 \cdot 0,089941$$

$$= \text{Zł } 1798.82.$$

Przykład 29. Za Zł 18000.— nabyto rentę, płatną co rok zdolu przy 5% w kwocie Zł 2000.—. Ile lat ją pobierano?

Ze wzoru

$$W = k \cdot a_{\overline{n}|}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{18000}{2000} = 9$$

i z tablicy IV. na zasadzie proporcjonalności:

12 l. — 8,86325	9,00000
13 l. — 9,39357	8,86325
0,53032	0,13675
0,13675 : 0,53032 = 0,258	
$n = 12 + 0,258$	
$= 12,258 \text{ lat.}$	

Ponieważ otrzymaliśmy niepełną liczbę lat ostatnia kwota renty jest mniejsza. Wartość jej możemy określić jako różnicę między wartością całej renty a wartością pierwszych pełnych 12 kwot, porównywując je w tym samym terminie.

Dzisiejszą wartość 12 pełnych kwot znajdziemy ze wzoru:

$$W_1 = k \cdot a_{\overline{12}|}$$

$$= 2000 \cdot 8,86325$$

$$= 17726.50.$$

Ponieważ dzisiejsza wartość całej renty jest Zł 18000.—, różnica tych dwóch liczb będzie obecną wartością ostatniej niepełnej kwoty.

$$= \frac{18000}{17726.50}$$

$$273.50.$$

Natomiast jej wartość w momencie wypłaty będzie wynosić

$$273.50 \cdot r^{12,258} = 497.50.$$

Zwykle jednak renta jest płatna w równych odstępach czasu, więc ostatnia kwota byłaby w tym wypadku wypłacona w końcu 13. roku w sumie

$$273,50 \times r^{13}$$

$$= 515.73.$$

Przykład 30. Przy jakiej stopie procentowej 18-letnia renta Zł 1000.— płatna zdołu kosztuje Zł 12000.— ?

$$\begin{aligned} W &= k \cdot a_{\overline{18}|} \\ a_{\overline{18}|} &= 12000 : 1000 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Tablica IV. podaje wartości czynnika dla 4% i 5% przy 18 l., mieszczące między sobą wartość 12:

	4%	5%
18 l.	12,65930	11,68959

Stąd szukana stopa procentowa

$$p = 4,68\%$$

Gdy renta ma być wypłacana w środku roku, można ją zamienić na rentę płatną w końcu roku, stosując oprocentowanie za pół roku.

Przykład 31. Za jaką sumę można nabyć rentę płatną w ciągu 12 lat w środku roku przy 4% w kwocie Zł 500.—.

Gdyby ta renta miała być płatna corocznie zdołu, rozmiar jej wyniósłby $500 \cdot r^{0.5} = 500 \times 1,02 = 510$, a wówczas wartość dzisiejsza $510 \cdot a_{\overline{12}|} = 510 \cdot 9,38507$

Zł 4786.39 jest odpowiedzią zadania.

W przykładzie 36. podałem inny sposób rozwiązania tegoż zagadnienia.

2) Płatność na początku okresów.

Jeżeli rentę w rozmiarze k pobierać przy $p\%$ na początku każdego okresu np. roku, to

wartość dzisiejsza kwoty k pobr. na początku l. r. będzie k

"	"	"	"	"	"	II. "	"	kv
"	"	"	"	"	"	III. "	"	kv^2
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
"	"	"	"	"	"	$n-1.$	"	kv^{n-2}
"	"	"	"	"	"	$n.$	"	kv^{n-1}

i wogóle wartość dzisiejsza takiej renty

$$\begin{aligned} W^1 &= k + kv + kv^2 + \dots + kv^{n-2} + kv^{n-1} \\ \text{albo } W^1 &= k(1 + v + v^2 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1}) \end{aligned}$$

Wyrażenie, stojące w nawiasie, przekształcić można jak na str. 43. i wobec tego

$$W^1 = k \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

Oznaczmy $\frac{1 - v^n}{1 - v}$ przez $a_{\overline{n}|}$, w takim razie

$$W^1 = k \cdot a_{\overline{n}|}$$

Czynnik rentowy $a_{\overline{n}|}$ przedstawia wartość dzisiejszą jednostki renty płatnej na początku każdego roku przez lat n .

Dla tego czynnika można nie układać nowej tablicy, ponieważ tablica IV. w zupełności wystarczy. Zauważmy, że

$$a_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1}$$

odejmując od obu stron równania po 1, otrzymamy

$$a_{\overline{n}|} - 1 = v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1}$$

Prawa strona równania na zasadzie wywodów na str. 44 daje $a_{\overline{n-1}|}$, wobec tego

$$a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1^*)$$

Na zasadzie tego wzoru przejścia, szukając wartości a dla lat n bierzemy wartość czynnika a dla lat $n-1$ i dodajemy 1.

Między czynnikami $a_{\overline{n}|}$ i $S_{\overline{n}|}$ istnieje taka sama zależność, jak między $a_{\overline{n}|}$ i $S'_{\overline{n}|}$ (patrz str. 44)

*) • Gdyby dana była tablica czynników $a_{\overline{n}|}$, szukalibyśmy wartości czynników $a_{\overline{n}|}$ ze wzoru przejścia

$$a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+1}|} - 1,$$

który wyprowadzamy z równania

$$a_{\overline{n}} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n$$

dodając do obu stron równania po 1.

Z równania $a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{1-v}$, dzieląc przez v^n , otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_{\overline{n}|}}{v^n} &= \frac{1}{v^n} - 1 \\ &= \frac{1-v}{1-v} \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} a_{\overline{n}|} \cdot r^n &= S_{\overline{n}|} \\ \text{albo } a_{\overline{n}|} &= S_{\overline{n}|} \cdot v^n \end{aligned}$$

$$a_{\overline{n}|} \cdot r^n = r \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Wyprowadźmy jeszcze zależność między czynnikami $a_{\overline{n}|}$ i $a_{\overline{n}|}$, analogiczną do zależności między $S_{\overline{n}|}$ i $S_{\overline{n}|}^1$.

Ponieważ

$$a_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-3} + v^{n-2} + v^{n-1} + \dots$$

to po pomnożeniu obu stron równania przez v otrzymamy

$$a_{\overline{n}|} \cdot v = v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n$$

albo

$$a_{\overline{n}|} \cdot v = a_{\overline{n}|}$$

i, uwzględniając $\frac{1}{v} = r$

$$a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot r$$

Przykład 32. Za ile można nabyć prawo do renty płatnej w kwocie Zł 1.000.— co pół roku zgóry przez lat 10 przy 3% półrocznie? Ze wzoru:

$$\begin{aligned} W^1 &= k \cdot a_{\overline{20}|} \\ &= 1000 \cdot [a_{\overline{19}|} + 1] \\ &= 1000 \cdot 15,32380 \\ &= \text{Zł } 15323.80. \end{aligned}$$

Biorąc te same dane liczbowe co w przykładzie 27. otrzymaliśmy wynik większy. Zależność między rezultatami jest oczywiście następująca:

$$\begin{aligned} W \cdot r &= W^1 \text{ względnie } W = W^1 \cdot v \text{ czyli} \\ 14877,47 \times r &= 15323.80 \end{aligned}$$

Przykład 33. Wpłacono jednorazowo Zł 20.000.— celem pobierania przez lat 15 renty, płatnej na początku każdego roku. Jaki był rozmiar renty przy 4%?

Podstawiając we wzór:

$$\begin{aligned} W^1 &= k \cdot a_{\overline{n}|} \\ 20000 &= k \cdot a_{\overline{15}|} \\ \text{otrzymamy } k &= \frac{20000}{a_{\overline{14}|} + 1} \\ &= \frac{20000}{11,56312} \\ &= 1729,64. \end{aligned}$$

Dane liczbowe wzięte były z przykładu 28.; zależność wyników

$$1729,64 \times r = 1798,82$$

Wobec płatności renty zgóry jednorazową wpłatę Zł 20.000.— należy zmniejszyć o pierwszą kwotę wypłaconą natychmiast. W takim razie należy wpłacić tylko:

$$20000 - 1729,64 = \text{Zł } 18270,36.$$

Renta płatna zgóry nazywa się **natychmiastową**.

Przykład 34. Za Zł 18.000.— nabyto rentę płatną co rok zgóry przy 5% w kwocie Zł 2000.—. Ile lat ją pobierano?

Podług wzoru:

$$\begin{aligned} W^1 &= k \cdot a_{\overline{n}|} \\ a_{\overline{n}|} &= \frac{18000}{2000} \\ &= 9 \end{aligned}$$

Ponieważ nie mamy tablicy czynników $a_{\overline{n}|}$, stosujemy wzór przejścia

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= a_{\overline{n-1}|} + 1 \\ \text{Więc } a_{\overline{n-1}|} + 1 &= 9 \quad \text{czyli} \\ a_{\overline{n-1}|} &= 8 \end{aligned}$$

Na zasadzie proporcjonalności:

dla 5%	
10 l. 7,72173	— 8,30641
11 l. 8,30641	8,00000
— 8,30641	0,30641
7,72173	0,30641 : 0,58468 = 0,524
0,58468	n - 1 = 11 - 0,524
	= 10,476
	n = 11,476 l.

Niecałkowita liczba lat wskazuje, że ostatnia 12. kwota renty jest niepełna. Wartość jej będzie różnicą między wartością całej renty, a wartością 11 pierwszych kwot na początku 12. roku. Oczywiście po 11. latach kapitał Zł 18.000.— wzrośnie do wartości

$$18000 \cdot r^{11} = 18000 \cdot 1,71034 \\ = 30786.12$$

a skapitalizowana wartość 11 kwot renty wyniesie

$$2000 \cdot S_{\overline{11}|} = 2000 \cdot 14,91713 \\ = 29834.26$$

Różnica tych dwóch wartości będzie ostatnią kwotą renty

$$\begin{array}{r} 30786.12 \\ - 29834.26 \\ \hline \text{Zł } 951.86 \end{array}$$

Przykład 35. Przy jakiej stopie procentowej można nabyć 45. letnią rentę, płatną zgóry w rozmiarze Zł 2.000.— za Zł 50.508.54? Podług wzoru

$$\begin{aligned} W^1 &= k \cdot a_{\overline{n}|} \\ a_{\overline{45}|} &= 25,25427 \\ \text{albo } a_{\overline{44}|} &= 24,25427 \\ \text{i z tablicy IV. } p &= 3\% \end{aligned}$$

Ponieważ renta jest płatna zgóry, kasa odliczy przy wnoszeniu przez nas sumy Zł 50.508.54, jako wartości całej renty, pierwszą wypłatę renty t.j. Zł 2.000.—.

Przykład 36. Inne rozwiązanie przykładu 31.

Rentę o rozmiarze Zł 500.— płatną w środku roku w ciągu 12 lat przy 4% możemy zamienić na rentę płatną na początku roku, przesuwając termin płatności o pół roku wstecz za pomocą czynnika dyskontującego:

$$500 \cdot v^{0,5} = 490.39$$

Wartość dzisiejsza takiej renty powinna być taką samą, jak w przykładzie 31.

$$490,39 \cdot a_{\overline{12}|} = 490,39 (a_{\overline{11}|} + 1) \\ = \text{Zł } 4786.44.$$

Posiłkowanie się liczbami przybliżonemi wpłynęło na różnicę wyników.

Aby obliczyć wartości czynnika rentowego $a_{t|}$ i $a_{t-1|}$ dla $t > n$, gdy tablica posiada wartości dla n okresów, postępujemy podobnie jak z czynnikami kapitalizacyjnymi (str. 35)

$$\begin{aligned} a_{t|} &= v + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n + v^{n+1} + v^{n+2} + \dots + v^{t-1} + v^t \\ &= a_{n|} + (v^{n+1} + v^{n+2} + \dots + v^{t-1} + v^t) \\ &= a_{n|} + v^n \cdot (v + v^2 + \dots + v^{t-n-1} + v^{t-n}) \end{aligned}$$

ostatecznie

$$a_t = a_{n|} + v^n \cdot a_{t-n|}$$

W ten sam sposób

$$\begin{aligned} a_t &= 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n + v^{n+1} + v^{n+2} + \dots + v^{t-2} + v^{t-1} \\ &= a_{n-1|} + (v^n + v^{n+1} + v^{n+2} + \dots + v^{t-2} + v^{t-1}) \\ &= a_{n-1|} + v^n \cdot (1 + v + v^2 + \dots + v^{t-n-2} + v^{t-n-1}) \end{aligned}$$

ostatecznie

$$a_{t-1|} = a_{n-1|} + v^n \cdot a_{t-n|}$$

Np. przy 4⁰/₀

$$a_{90|} = a_{50|} + v^{50} \cdot a_{40|} = 24,26722$$

$$a_{60|} = a_{50|} + v^{50} \cdot a_{10|} = 23,52841$$

3) Zamiana rent.

Gdy rentę o rozmiarze rocznym k chcemy pobierać w m rocznych ratach, to wartość dzisiejsza tych rat musi równać się wartości dzisiejszej kwoty k . Mogą tu zachodzić cztery wypadki:

- 1) kwotę roczną k , płatną zgóry, zamieniamy na m rat rocznych, płatnych zgóry, wówczas

$$x_i \cdot a_{m|} = k$$

gdy x_i jest rozmiarem raty,

- 2) kwotę roczną k , płatną zgóry, zamieniamy na m rat rocznych, płatnych zdołu

$$x_{ii} \cdot a_{m|} = k$$

- 3) kwotę roczną k , płatną zdołu, zamieniamy na m rat rocznych, płatnych zgóry

$$x_{iii} \cdot a_{m|} = kv$$

- 4) kwotę roczną k , płatną zdołu, zamieniamy na m rat rocznych, płatnych zdołu

$$x_{m|} \cdot \overline{a_{m|}} = kv$$

Zamiana rent jest zupełnie analogiczna do zamiany wkładki (str. 37) z tą różnicą, że, gdy tu dokonywujemy zamiany, wychodząc z wartości dzisiejszej, tam posiłkowaliśmy się wartością końcową. Przytem stosujemy również stopę dostosowaną względną lub bezwzględną.

4) Renty odroczone.

Pobieranie renty niekoniecznie musi nastąpić zaraz. Może upłynąć pewien czas, po którym rentę zaczynamy pobierać, czyli kiedy renta staje się płynną. Czas taki nazywa się czasem odroczenia renty, a renta, płynna w ciągu określonego czasu dopiero po upływie czasu odroczenia, — rentą czasową odroczoną. Na tej zasadzie renta, płatna zdołu t. j. w końcu każdego roku będzie odroczoną na 1 rok.

Prawo do pobierania renty odroczonej można nabyć albo na podstawie jednorazowej wkładki, albo na podstawie okresowych wkładek, składanych przez czas odroczenia.

a) Renty czasowe odroczone, nabywane na podstawie jednorazowej wkładki.

Jeżeli po upływie m lat mamy pobierać jednostkę renty przy $p\%$ przez dalszych lat n , to wartość takiej renty w momencie rozpoczęcia jej płynności musimy zdyskontować na czas odroczenia m , aby otrzymać wartość dzisiejszą takiej renty odroczonej.

Tak obliczona wartość dzisiejsza będzie jednorazową wkładką, na mocy której uzyskujemy prawo do wspomnianej renty. Oznaczmy ją przez ${}_m|a_{n|}$; wówczas na zasadzie powyższego

$${}_m|a_{n|} = \overline{a_{n|}} \cdot v^m$$

Gdyby renta była płatna zdołu, możnaby napisać analogicznie

$${}_m|\overline{a_{n|}} = \overline{a_{n|}} \cdot v^m$$

albo ${}_{m+1}|\overline{a_{n|}} = \overline{a_{n|}} \cdot v^{m+1}$

We wzorach tych mamy do czynienia z mnożeniem czynnika rentowego przez dyskontujący. Tę niedogodność ominąć można na mocy następującego rozumowania.

Przypuśćmy, że zamiast renty czasowej n letniej, odroczonej na m lat, mamy pobierać rentę czasową natychmiastową płatną $n+m$ lat. Jeżeli od wartości dzisiejszej takiej renty odejmiemy wartość dzisiejszą pierwszych m kwot renty istotnie przez nas niepobranych, otrzymamy wartość dzisiejszą renty czasowej n letniej, odroczonej na m lat.

Albo w symbolach

$$\begin{aligned} {}_m|a_n| &= a_n| \cdot v^m \\ {}_m|a_n| &= a_{n+m}| - a_m| \quad *) \end{aligned}$$

Podobnie postępowaliśmy ze skapitalizowanymi wkładkami, pozostawionymi nadal na procencie składanym (str. 30).

Przykład 37. Ile należy złożyć jednorazowo, aby po upływie 9 lat pobierać przez 15 lat w końcu każdego roku rentę w rozmiarze Zł 1000.— przy 5%?

Rozwiązanie: Ponieważ renta ma być płatna zdołu po upływie 9 lat pierwsza jej wpłata przypadnie w końcu 10. roku.

Zatem jeśli za czas odroczenia przyjmiemy 10 lat, otrzymamy 15 letnią rentę płatną zgóry. Wobec tego

$$\begin{aligned} W^1 &= 1000 \cdot {}_{10}|a_{15}| \\ \text{albo } W^1 &= 1000 (a_{25}| - a_{10}|) \end{aligned}$$

Ponieważ mamy tablicę czynników a (tabl. IV.), zamiast $a_{25}|$ podstawimy $a_{24}| + 1$ i $a_{9}| + 1$ zamiast $a_{10}|$

$$\begin{aligned} \text{Wówczas } W^1 &= 1000 (a_{24}| - a_{9}|) \\ &= 1000 (13,79864 - 7,10782) \\ &= 1000 \cdot 6,69082 \\ \text{ostatecznie } &= \text{Zł } 6690.82. \end{aligned}$$

*) Udowodnienie tej zależności polega na zwykłej przeróbce algebraicznej. Mamy okazać, że

$$\begin{aligned} a_n| \cdot v^m &= a_{n+m}| - a_m| \\ \text{Po podstawieniu: } \frac{1-v^n}{1-v} \cdot v^m &= \frac{1-v^{n+m}}{1-v} - \frac{1-v^m}{1-v} \\ &= \frac{1-v^{n+m} - 1 + v^m}{1-v} \\ &= \frac{v^m(1-v^n)}{1-v} \quad \text{c. b. d. o.} \end{aligned}$$

Do tego samego wyniku dojdziemy, pisząc podług warunków zadania, że $W = 1000 \cdot {}_9|a_{15}|$ lub $W = 1000 (a_{24}| - a_{9}|)$ i t. d. jak poprzednio.

b) Renty czasowe odroczone, nabywane na podstawie okresowych wkładek.

Jeżeli prawo do pobierania renty czasowej odroczonej nabywamy na podstawie wkładek, składanych co rok lub w innych odstępach czasu, to wkładki takie nazywamy premjami. Oczywiście tylko rentę odroczoną można nabyć drogą okresowych premij, wnoszonych przez czas odroczenia.

Premje wpłacamy zawsze zgóry, ponieważ czas oprocentowania liczy się zawsze od chwili złożenia pierwszej wkładki.

Obliczanie wysokości premij rocznych P , składanych przez m lat zgóry przy $p\%$ celem nabycia renty czasowej, płatnej zgóry przez dalsze n lat w kwocie 1, przeprowadzamy na zasadzie, że wartość wniesionych premij równa się wartości wypłacanej renty w tym samym, dowolnym zresztą, terminie. Najdogodniejszym terminem jest moment złożenia pierwszej premji, lub początek okresu płynności renty.

W I. wypadku dzisiejsza wartość premij, płatnych zgóry przez m lat w rozmiarze rocznym P wynosi

$$P \cdot a_{m}|$$

a dzisiejsza wartość renty n letniej, płatnej zgóry po upływie m lat w kwocie 1 jest

$${}_m|a_n| = a_{n+m}| - a_m|$$

Ponieważ wartości dzisiejsze renty i premij muszą być sobie równe, możemy napisać, że

$$\begin{aligned} P \cdot a_{m}| &= {}_m|a_n| \\ \text{albo} \quad P \cdot a_{m}| &= a_{n+m}| - a_m| \end{aligned}$$

$$\text{skąd} \quad P = \frac{a_{n+m}| - a_m|}{a_m|}$$

W II. wypadku porównujemy skapitalizowaną wartość premij po m latach z wartością renty w tymże terminie, a więc

$$P \cdot S_{\overline{m}|} = a_{\overline{n}|}$$

$$\text{skąd } P = \frac{a_{\overline{n}|}}{S_{\overline{m}|}} \quad *)$$

Przykład 38. Przez 8 lat wpłacano premje roczne celem pobierania przez następnych lat 10 corocznie zgóry rentę w rozmiarze Zł 2.000.—. Jaka była wysokość premji, gdy liczone 4%?

$$1) \quad P = \frac{a_{\overline{n}|}}{S_{\overline{m}|}}$$

dla renty Zł 2000.—

$$\begin{aligned} P &= 2000 \cdot \frac{a_{\overline{9}|} + 1}{S_{\overline{8}|}} \\ &= 2000 \cdot \frac{8,43533}{9,58280} \\ &= \text{Zł } 1760.52. \end{aligned}$$

2) albo podług wzoru

$$\begin{aligned} P &= \frac{a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{m}|}} \\ &= 2000 \cdot \frac{a_{\overline{18}|} - a_{\overline{8}|}}{a_{\overline{8}|}} \\ &= 2000 \cdot \frac{a_{\overline{17}|} - a_{\overline{7}|}}{a_{\overline{7}|} + 1} \\ &= 2000 \cdot \frac{12,16567 - 6,00205}{7,00205} \\ &= 2000 \cdot \frac{6,16362}{7,00205} \\ &= \text{Zł } 1760.52. \end{aligned}$$

*) Łatwo przekonać się, że

$$\begin{aligned} \frac{a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{m}|}} &= \frac{a_{\overline{n}|}}{S_{\overline{m}|}} \\ \text{Istotnie } \frac{a_{\overline{n}|} \cdot v^m}{a_{\overline{m}|}} &= \frac{a_{\overline{n}|}}{S_{\overline{m}|}}, \text{ dzieląc przez } a_{\overline{n}|} \\ \frac{v^m}{a_{\overline{m}|}} &= \frac{1}{S_{\overline{m}|}} \\ \text{i } a_{\overline{m}|} &= S_{\overline{m}|} \cdot v^m \text{ c. b. d. o (patrz str. 49.)} \end{aligned}$$

5) Renty zmienne.

Obliczmy wartość renty odroczonej na m okresów płatnej przez n okresów przy $p\%$ w rozmiarze zasadniczym k zmiennym o $\pm \delta$. Będziemy więc mieli

Okres	KWOTY RENTY	
	w terminach płatności	w chwili obecnej
1	k	$k \cdot v^m$
2	$k \pm \delta$	$(k \pm \delta) v^{m+1}$
3	$k \pm 2\delta$	$(k \pm 2\delta) v^{m+2}$
-	- - -	- - -
-	- - -	- - -
-	- - -	- - -
-	- - -	- - -
$n-1$.	$k \pm (n-2)\delta$	$[k \pm (n-2)\delta] v^{m+n-2}$
n .	$k \pm (n-1)\delta$	$[k \pm (n-1)\delta] v^{m+n-1}$

Sumujemy oddzielnie szereg k i δ :

$$\begin{aligned}
 W &= k (v^m + v^{m+1} + v^{m+2} + \dots + v^{m+n-2} + v^{m+n-1}) \pm \\
 &\quad \pm \delta [v^{m+1} + 2v^{m+2} + \dots + (n-2)v^{m+n-2} + (n-1)v^{m+n-1}] \\
 &= k \cdot v^m (1 + v + v^2 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1}) \pm \\
 &\quad \pm \delta \cdot v^m [v + 2v^2 + \dots + (n-2)v^{n-2} + (n-1)v^{n-1}]
 \end{aligned}$$

Oznaczmy przez Ω wyrażenie, stojące w drugim nawiasie; wobec tego

$$W = k \cdot v^m \cdot a_{\overline{n}|} \pm \delta \cdot v^m \cdot \Omega.$$

Rozwińmy teraz wartość Ω , jak następuje:

$$\begin{aligned}
 v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1} &= v \cdot \frac{1 - v^{n-1}}{1 - v} \\
 v^2 + v^3 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1} &= v^2 \cdot \frac{1 - v^{n-2}}{1 - v} \\
 v^3 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1} &= v^3 \cdot \frac{1 - v^{n-3}}{1 - v} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$v^{n-3} + v^{n-2} + v^{n-1} = v^{n-3} \cdot \frac{1-v^3}{1-v}$$

$$v^{n-2} + v^{n-1} = v^{n-2} \cdot \frac{1-v^2}{1-v}$$

$$v^{n-1} = v^{n-1} \cdot \frac{1-v}{1-v}$$

Biorąc $\frac{1}{1-v}$ przed nawias i wykonywując mnożenie w licznikach, otrzymamy

$$\Omega = \frac{1}{1-v} [(v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-3} + v^{n-2} + v^{n-1}) - (n-1) \cdot v^n]$$

do różnicy w nawiasach dodajmy i odejmijmy v^n :

$$\Omega = \frac{1}{1-v} [(v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-3} + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n) - (n-1) \cdot v^n + v^n]$$

zauważmy, że

$$\frac{1}{1-v} = \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{r}{r-1} = \frac{100 \cdot r}{p}$$

a suma czynników v w pierwszym nawiasie to $a_{\overline{n}|}$, wobec tego

$$\Omega = \frac{100 \cdot r}{p} [a_{\overline{n}|} - n \cdot v^n]$$

W takim razie wartość dzisiejsza renty zmiennej odroczonej

$$W = k \cdot m | a_{\overline{n}|} \pm \frac{\delta \cdot 100 \cdot v^{m-1}}{p} [a_{\overline{n}|} - n \cdot v^n]$$

gdy $m = 0$, $v^{m-1} = r$, otrzymamy wartość dzisiejszą renty zmiennej płatnej zgóry

$$W' = k \cdot a_{\overline{n}|} \pm \delta \cdot \frac{100 \cdot r}{p} [a_{\overline{n}|} - n \cdot v^n]$$

dzieląc przez r , otrzymamy wartość dzisiejszą renty zmiennej płatnej zdołu

$$W'' = k \cdot a_{\overline{n}|} \pm \delta \cdot \frac{100}{p} [a_{\overline{n}|} - n \cdot v^n]$$

Jeśli chodziło o rentę malejącą, to δ nie może być dowolne, ale musi spełniać warunek, omówiony na str. 42, według którego

$$\max \delta = \frac{k}{n-1}$$

Przykład 39. Ile należy zapłacić za 10-letnią rentę o rozmiarze Zł 18.000.— malejącą corocznie o Zł 2.000.— i płatną zdołu przy 5% rocznie.

$$\begin{aligned} W'' &= 18000 \cdot a_{\overline{10}|} - 2000 \cdot \frac{100}{5} [a_{\overline{10}|} - 10 \cdot v^{10}] \\ &= \text{Zł } 75.687.— \end{aligned}$$

Ponieważ w tym przykładzie δ posiada wartość maksymalną, to w dziesiątym roku rozmiar renty będzie równy zeru i właściwie mamy do czynienia z rentą 9-letnią.

Możnaby więc napisać, że

$$W'' = 18000 \cdot a_{\overline{9}|} - 2000 \cdot \frac{100}{5} [a_{\overline{9}|} - 9 \cdot v^9]$$

skąd po wyliczeniu

$$W'' = \text{Zł } 75.687.— \quad \text{jak wyżej.}$$

6) Renty wieczne.

Jeżeli czas płynności renty czasowej będzie wzrastał nieograniczenie, otrzymamy rentę wieczną.

Zależnie od terminu, w którym zaczynamy pobierać rentę wieczną, rozróżniamy rentę płatną zgóry, zdołu i odroczoną. Odpowiednie wzory wyprowadzimy ze wzoru na rentę czasową, zakładając, że $n \rightarrow \infty$, $v^n \rightarrow 0$.

Otrzymamy wówczas

1) dla renty wiecznej płatnej zgóry

$$a_{\overline{n}|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1}{1 - v}$$

$$a_{\overline{n}|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - v}$$

Zauważmy, że $v = \frac{1}{r}$ a $r = 1 + \frac{p}{100}$

$$\text{wtedy } a_{\overline{n}|} = \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}$$

$$= \frac{r}{r - 1}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{100 r}{p}$$

2) dla renty wiecznej płatnej zdołu (t. j. odroczonej na 1 rok)

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} \\ &= v \cdot \frac{1}{1 - v} \\ &= v \cdot a_{\overline{n}|} \end{aligned}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{100}{p}$$

3) dla renty odroczonej na m lat

$${}_m|a_{\overline{n}|} = \frac{100 r}{p} \cdot v^m$$

$${}_m|a_{\overline{n}|} = \frac{100}{p} \cdot v^{m-1}$$

Z porównania tych wzorów okazuje się, że wartość dzisiejsza jednostki renty jest największa przy rencie natychmiastowej czyli płatnej zgóry. Wzór $a_{\overline{n}|} = \frac{100}{p}$ nasuwa wniosek, że renta wieczna płatna zdołu polega na pobieraniu procentu od kapitału.

Przykład 40. Za ile można nabyć rentę wieczną o rozmiarze Zł 1.000.—, płatną corocznie przy 4% a) zgóry, b) zdołu, c) po 10 latach?

a)

$$a_{\overline{n}|} = \frac{100 r}{p}$$

dla rozmiaru Zł 1000.—

$$W_{\alpha} = \frac{100 \cdot 1,04}{4} \cdot 1000$$

$$= \text{Zł } 26.000.—$$

β)

$$a_{\overline{n}|} = \frac{100}{p}$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$W_{\beta} = \frac{100}{4} \cdot 1000$$

$$= \text{Zł } 25.000.—$$

γ)

$${}_m|a_{\overline{n}|} = \frac{100}{p} v^{m-1}$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$W_{\gamma} = \frac{100}{4} \cdot v^9 \cdot 1000$$

$$= \text{Zł } 17.564.67$$

Zadanie 44. Rentę roczną, płatną zdołu w kwocie Zł 1.000.— przy 4%, zamienić na rentę kwartalną, płatną przy 1% a) zgóry b) zdołu.

Zadanie 45. Rentę kwartalną, płatną zgóry w rozmiarze Zł 3.000.— przy 1% zamienić na rentę roczną płatną zdołu przy stopie dostosowanej a) względnej, b) bezwzględnej.

(Odp. a) Zł 12.296.—, b) Zł 12.303.—).

Zadanie 46. Za jaką sumę można nabyć 4% rentę roczną, płatną zdołu przez lat 10 i miesięcy 3 w rozmiarze Zł 1.000.— ?

Zadanie 47. Ile kosztowałaby taka sama renta, gdyby ostatnia kwota wynosiła również Zł 1.000.—, jak poprzednie?

Zadanie 48. Ojciec chciał zapewnić 14-letniemu synowi rentę roczną płatną po dojściu syna do pełnoletności przez 4 lata zgóry w wysokości Zł 3.000.—. Ile powinien składać na ten cel co rok zgóry przy 4%?

Zadanie 49. Zamienić 6% rentę roczną płatną zdołu w rozmiarze Zł 5.000.—, uwzględniając stopę dostosowaną względną, na kwartalną a) płatną zdołu, b) zgóry.

Zadanie 50. Wpłacano przez 10 lat corocznie zgóry po Zł 10.000.— przy 4%, aby pobierać corocznie zdołu po Zł 10.000.— przez następne lata. Jak długo pobierano rentę?
(Odp. 17,649 l.).

Zadanie 51. Składano przez lat 8 po Zł 1.000.— co rok zdołu, aby pobierać po upływie dalszych lat 8 przez następne lata corocznie zgóry rentę w podwójnej wysokości. Jak długo można tę rentę pobierać przy 4%?
(Odp. 7,083 l.).

Zadanie 52. Rentę roczną, płatną przy 3% w środku roku w kwocie Zł 5.000.—, nabyto za sumę, równą wartości po 3 latach renty rocznej, płatnej zdołu przy 4% lat 20 w kwocie Zł 2.000.—. Ile lat płatna była l. renta?
(Odp. 5,257 l.).

Zadanie 53. Zamienić rentę roczną Zł 1.000.—, płatną zgóry przez lat 8 przy 4% na inną, płatną corocznie zgóry przez lat 16?
(Odp. Zł 577.82).

Zadanie 54. Czy można nabyć rentę roczną Zł 1.000.— płatną zdołu po upływie 6 lat przez 18 lat przy 4% na podstawie jednorazowej wkładki, równej 6-krotnej premji rocznej płatnej przez czas odroczenia? Jaka będzie różnica?
(Odp. nie, Zł 388.08).

Zadanie 55. Ile wyniosły po 18 latach wkładki, składane przez lat 6 przy 3% corocznie zdołu i tworzące postęp arytmetyczny, którego $a = 1.000$; $r = 1.000$, wraz z wkładkami rocznymi po Zł 2.000.—, płatnymi zgóry przez następne lat 6 przy 4%
(Odp. Zł 48.940.83).

Zadanie 56. Za Zł 53.412.03 nabyto rentę roczną, płatną zgóry w kwocie Zł 5.000.— przy $4\frac{1}{2}\%$. Ile lat ją pobierano?

Zadanie 57. Po ile należy składać przez lat 7 na początku roku, aby pobierać przez następne lat 7 w środku roku po Zł 1.000.— przy 3%.

Zadanie 58. Wkładki, wnoszone przez lat 5 corocznie zdołu przy 4% w kwocie Zł 5.000.— uzupełniono sumą, płatną na początku 10. roku tak, aby nabyć prawo do renty, pobieranej począwszy od 11. roku, corocznie zgóry w rozmiarze Zł 2.200.— przez lat 25. Określić wysokość tej sumy.

Zadanie 59. Rentę Zł 5.000.—, płatną corocznie zdołu przez lat 10, zamieniono po zapłaceniu 4 pierwszych kwot, na inną rentę, płatną corocznie zdołu przez lat 12. Określić wysokość tej ostatniej przy 4%.

(Odp. Zł 2.792.80).

Zadanie 60. Ktoś składał przez lat 5 corocznie zdołu po Zł 10.000.— i począwszy od początku 7. roku po Zł 5.000.— przez 10 lat. Na tej podstawie nabył rentę płatną corocznie zgóry przez lat 18. Określić rozmiar renty, licząc 3%.

Zadanie 61. Jaką rentę, płatną corocznie zdołu przez 8 lat i 4 mies. przy $3\frac{4}{5}\%$ nabyć można za Zł 200.000.—.

Zadanie 62. Na podstawie wkładki, która przed 3 laty wynosiła Zł 100.000.— nabyto rentę, płatną corocznie zgóry w kwocie Zł 100.000.— i odebrano po 12 latach Zł 20.000.—. Ile lat pobierano rentę przy 4%?

(Odp. 12,382 l).

Zadanie 63. Przez 16 lat wpłacano co rok zdołu po Zł 50.000.— przy 4%, a przez następne lat 6 pobierano corocznie zgóry po Zł 150.000.—. Jaki był stan rachunku na początku 24. roku?

Zadanie 64. Jak długo należy płacić przy 3% po Zł 10.000.— corocznie zgóry, wpłacając nadto jednorazowo Zł 100.000.— po tymże czasie, aby nabyć prawo do renty płatnej zgóry przez następne lat 10 w rozmiarze Zł 20.000.— przy 4%.

Zadanie 65. Złożono do kasy oszczędności jednorazowo Zł 100.000.—. Przez 5 lat wpłacano po Zł 20.000.— corocznie zdołu. Przez dalsze 4 lata pobierano corocznie zgóry po Zł 50.000.—. Ile można jeszcze odebrać po 15 latach przy 2%?

(Odp. Zł 24.739).

Zadanie 66. Za Zł 250.000.— można nabyć rentę wieczną 3% a) płatną zgóry, b) zdołu, c) odroczoną na 5 lat. Znaleźć rozmiar renty w każdym wypadku.

(Odp. a) 7.281.55, b) 7.500.—, c) 8.441.43).

Zadanie 67. Sprzedano prawo do 4% renty wiecznej płatnej zdołu w rozmiarze Zł 4.000.—, uzyskując wzamian Zł 10.000.— płatne natychmiast, Zł 15.000.— po 5 latach oraz rentę odroczoną 20-letnią płatną w rozmiarze rocznym Zł 8.000.—. Określić czas odroczenia renty przy 5%.

Zadanie 68. Prawo do renty 80-letniej płatnej zdołu w rozmiarze rocznym Zł 10.000.— przy 4% sprzedano po 10 latach korzystania z niej. Ile otrzymano?

Zadanie 69. W ciągu jakiego czasu można pobierać rentę roczną płatną zgóry w rozmiarze Zł 5.000.— przy 4%, nabytą na podstawie jednorazowej wkładki, wynoszącej Zł 100.000.— i ile wyniesie ostatnia niepełna kwota renty?

Zadanie 70. Pobierający stypendjum w wysokości Zł 600.— kwartalnie przez $2\frac{1}{2}$ lat zobowiązał się spłacać je, poczynwszy od 6. roku miesięcznie po Zł 400.—, przyczem pierwsza rata była niepełna. Kiedy uiszczy swe zobowiązanie i ile wynosiła niepełna rata, jeśli stosowano stopę 1% miesięcznie.

(Odp. 28 rat, pierwsza Zł 240.—).

Zadanie 71. Pożyczka Zł 5.000.000.— umarzana jest przez 25 lat zmiennymi ratami przy $3\frac{1}{2}$ %, z których pierwsza jest najmniejsza, a każda następna wzrasta o Zł 40.000.—. Znaleźć pierwszą i ostatnią ratę.

Zadanie 72. Rentę odroczoną na 3 lata, płatną 10 lat w rozmiarze Zł 10.000.— przy $3\frac{1}{2}$ % zamieniono na rentę 6-letnią odroczoną na 6 lat przy $4\frac{1}{2}$ % w rozmiarze Zł 8.000.—. Różnica wartości tych rent była spłacona w trzech równych ratach, płatnych po 2, 4 i 6 latach przy 4%. Określić te raty.

Zadanie 73. Fundusz umorzeniowy pożyczki Zł 5.000.000.— składał się z sum po Zł 100.000.— każda, wnoszonych zdołu przez pierwsze 5 lat oraz z innych sum wnoszonych zdołu przez dalsze 10 lat. Znaleźć wysokość funduszu po 10 latach przy 5% rocznie.

(Odp. Zł 2.967.720.—).

Zadanie 74. Składano po Zł 2.500.— co rok zdołu przez 25 lat przy 5% rocznie celem pobierania renty płatnej w końcu każdego kwartału przez następne lata w wysokości Zł 2.500.— przy 1% kwartalnie. Jak długo pobierano rentę?

(Odp. 65,2 kw.).

Zadanie 75. Sprzedano prawo do renty płatnej kwartalnie zdołu przez lat 15 w rozmiarze Zł 3.000.—, licząc 2% kwartalnie i umieszczono uzyskaną sumę na 1% miesięcznie. Po pewnym czasie wycofano Zł 200.000.—. Określić ten czas.
(Odp. 65½ mies.).

Zadanie 76. Pewna pożyczka była spłacana ratami kwartalnymi zdołu w wysokości Zł 5.000.— przez lat 5, a następnie odpowiednimi ratami rocznymi przez dalszych 5 lat. Obliczyć jaką część pożyczki spłacono ratami kwartalnymi i rocznymi, licząc 1% kwartalnie.
(Odp. Zł 90.228.— i 73.946.—).

Zadanie 77. Jaką wartość dzisiejszą przedstawia dom, który przynosi obecnie Zł 7.680.— rocznego dochodu i jest wolny od podatków wynoszących Zł 3.650.— na przeciąg lat 15, jeżeli przyjmiemy oprocentowanie w stosunku 4% rocznie.
(Odp. Zł 141.332.—).

Zadanie 78. Wpłacono jednorazowo Zł 50.000.— celem pobierania renty kwartalnej zdołu w rozmiarze Zł 5.000.—. Jak długo pobierano rentę i ile wynosi ostatnia niepełna kwota renty, jeżeli liczono 2% kwartalnie?
(Odp. 12-ta kwota renty wynosi Zł 1.349.—).

Zadanie 79. Pewien student pobierał stypendjum w rozmiarze Zł 250.— co miesiąc zdołu przez lat 4. Po upływie dalszych lat 3 stypendysta zamierzał zwrócić pobierane poprzednio stypendjum. Po ile powinien spłacać miesięcznie zdołu w ciągu 7 lat przy 1% miesięcznie?
(Odp. Zł 387.—).

Zadanie 80. Obliczyć wartość strat poniesionych przez firmę z powodu niezapłacenia przez dłużnika należności w 4-ch ratach kwartalnych zdołu po Zł 30.000.—, jeżeli przyjąć w obliczeniu 1% miesięcznie.

Zadanie 81. Jaką sumę należy wstawić do budżetu państwa, aby pokryć subsydjum przewidziane dla rolników w wysokości Zł 5.000.000.— miesięcznie zgóry w ciągu drugiego kwartału roku kalendarzowego, jeżeli przyjąć 5% kwartalnie.

Zadanie 82. Pożyczkę 4% spłacano zdołu ratami rocznymi, wynoszącymi 10% kapitału pożyczonego. Kiedy spłacono pożyczkę i ile zostało do zapłacenia w ostatnim roku.
(Odp. ok. ¼%).

ROZDZIAŁ V.

Umorzenia.

1) Umarzanie pożyczek ratami.

Towarzystwa kredytowe wypożyczają kapitały na zastaw nieruchomości na długi szereg lat z żądaniem umarzania takich długoterminowych pożyczek zapomocą okresowych rat. Wówczas kapitał wypożyczony przez towarzystwo jest wartością dzisiejszą rat, które dłużnik ma płacić w ciągu danego czasu.

Jeżeli więc wypożyczony kapitał K mamy spłacić rocznymi ratami A w ciągu n lat zdołu przy $p\%$ to, zgodnie z wzorem

$$\begin{aligned} W &= k \cdot a_{\overline{n}|}, \\ K &= A \cdot a_{\overline{n}|}, \end{aligned}$$

$$k = \frac{W}{a_{\overline{n}|}} = W \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

skąd mamy wzór na wysokość raty

$$A = K \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

We wzorze powyższym dzielenie przez $a_{\overline{n}|}$ zastępujemy mnożeniem przez $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ dla ułatwienia obliczeń. Wartości tego czynnika, zwanego czynnikiem umorzeniowym (amortyzacyjnym) są podane w tablicy V_1 . Czynniki $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ oznaczają wysokość raty, płatnej w końcu każdego okresu celem umorzenia jednostki długu przy $p\%$ w ciągu n okresów.

Przykład 41. Wypożyczamy kapitał Zł 100.000.— na 6 lat*) przy 4%, zobowiązując się spłacać go ratami rocznymi, płatnymi zdołu. Jaki był rozmiar rat?

$$\begin{aligned}
 A &= 100000 \cdot \frac{1}{a_n} \\
 &= 100000 \cdot 0,19076190 \\
 &= \text{Zł } 19076.19^{**})
 \end{aligned}$$

2) Plan umorzenia.

Dla dogodności towarzystwa i dłużnika układa się plan umorzenia (amortyzacyjny), w którym uwidoczniamy stan długu w każdym roku i sposób podziału każdej wnoszonej przez dłużnika raty na odsetki i kwotę umorzeniową, wpływającą na zmniejszenie długu.

Plan umorzenia długu Zł 100.000.—, który ma być spłacony 6 ratami rocznymi po Zł 19.076.19, obliczonymi w przykładzie 41, będzie ułożony w następujący sposób:

Rata umorzeniowa: 19076.19 ^A 6

Rok	Stan długu na początku każdego roku	Z raty umorzeniowej przypada na		Stan długu w końcu każdego roku
		odsetki	kwotę umorz.	
1	2	3	4	5
1.	100000.—	4000.—	15076.19	84923.81
2.	84923.81	3396.95	15679.24	69244.57
3.	69244.57	2769.78	16306.41	52938.16
4.	52938.16	2117.53	16958.66	35979.50
5.	35979.50	1439.18	17637.01	18342.49
6.	18342.49	733.70	18342.49	—
	361128.53	14457.14	100000.—	

*) W praktyce czas umarzania pożyczek jest o wiele dłuższy. W naszym przykładzie chodzi o uniknięcie znużających wyliczeń.

**) W dziale pożyczek mamy zwykle do czynienia z dużymi sumami, dlatego też stosujemy większą dokładność.

Każdą pozycję planu umorzenia można sprawdzić na zasadzie następujących własności:

1) Odsetki, obliczane od coraz to mniejszego kapitału, corocznie maleją. Ponieważ zaś suma odsetek i kwoty umorzeniowej w każdym roku jest stała i równa racie umorzeniowej, kwota umorzeniowa musi z roku na rok wzrastać

Na powyższym przykładzie przekonamy się o rozmiarze tego wzrostu. Weźmy pierwszą kwotę i pomnóżmy ją przez r .

$$15076.19 \times 1,04 = 15679.24$$

Otrzymaliśmy następną kwotę. Analogicznie

$$15679.24 \times 1,04 = 16306.41 \text{ i t. d.}$$

Jeżeli wogóle oznaczymy kwoty przez

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n,$$

zależność między nimi będzie następująca:

$$U_1 \cdot r = U_2$$

$$U_2 \cdot r = U_3$$

$$U_3 \cdot r = U_4$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$U_{n-1} \cdot r = U_n$$

skąd przez kolejne podstawienie otrzymamy

$$U_n = U_1 \cdot r^{n-1}$$

Zatem kwotę umorzeniową każdego roku można otrzymać mnożąc kwotę umorzeniową poprzedniego roku przez czynnik oprocentowujący r .

Zależność ta jest oczywista również ze względu na to, że każda kwota umorzeniowa płatna w rok później po poprzedniej zawierać w sobie musi poprzednią kwotę i procent od niej za jeden rok.

2) Zauważmy, że stan długu ostatniego roku równa się kwocie umorzeniowej tegoż roku, ponieważ w ostatnim roku umarzamy resztę długu. W takim razie odsetki 733.70 obliczane od stanu długu ostatniego roku dają wraz z tą sumą ratę umorzeniową 19076.19.

$$\text{A więc} \quad 19076.19 = 18342.49 \times 1,04$$

$$\text{i wogóle} \quad A = U_n \cdot r$$

$$A = U_n \cdot r$$

t. j. mnożąc kwotę umorzeniową ostatniego roku przez czynnik r otrzymujemy ratę umorzeniową

$$\begin{aligned} \text{Podstawiając } U_n &= U_1 \cdot r^{n-1} \\ \text{otrzymamy } A &= U_1 \cdot r^n \end{aligned}$$

3) Kwota umorzeniowa w dowolnym roku m

$$\begin{aligned} U_m &= U_1 \cdot r^{m-1} \\ \text{ale } U_1 &= A \cdot v^n \\ \text{więc } U_m &= A \cdot v^n \cdot r^{m-1} \\ &= A \cdot \frac{v^n}{v^{n-m+1}} \end{aligned}$$

$$\text{i ostatecznie } U_m = A \cdot v^{n-m+1}$$

4) Stan długu w końcu każdego roku możemy określić jako wartość zdyskontowaną rat umorzeniowych pozostałych jeszcze do spłacenia.

W przykładzie naszym:

stan długu w końcu	V. roku	18342.49	$= 19076.19 \times a_{\overline{1} }$
" " " "	IV. "	35979.50	$= 19076.19 \times a_{\overline{2} }$
" " " "	III. "	52938.16	$= 19076.19 \times a_{\overline{3} }$
" " " "	II. "	69244.57	$= 19076.19 \times a_{\overline{4} }$
" " " "	I. "	84923.81	$= 19076.19 \times a_{\overline{5} }$

wogóle stan długu w końcu m . roku (po upływie m lat)

$$K_m = A \cdot a_{\overline{n-m}|}$$

gdy dług ma być spłacany w ciągu n lat.

5) Suma kwot umorzeniowych, jako zwrot długu, musi równać się wypożyczonemu kapitałowi.

6) Suma kwot umorzeniowych wraz z sumą odsetek powinna stanowić sumę wszystkich rat umorzeniowych, które istotnie wpłacamy. W naszym przykładzie

$$100000 + 14457.14 = 19076.19 \times 6$$

7) Ponieważ odsetki każdego roku liczymy od stanu długu w danym roku, ich suma powinna stanowić procent od sumy wszystkich stanów długu. W naszym przykładzie

$$14457.14 = \frac{4}{100} \times 361128.53$$

3) Umarzanie pożyczek ratami oznaczonemi.

Towarzystwa kredytowe, określając warunki udzielania pożyczek, zwykle podają stopę procentową, pobieraną od kapitału wypożyczonego i stopę przeznaczoną na umorzenie długu. Wówczas rata umorzeniowa jest sumą okrągłą, natomiast liczba okresów umarzania jest zwykle niecałkowita i ostatnia rata niepełna.

Przykład 42. Wypracować plan umorzenia długu Zł 20.000.—, licząc 4% rocznie odsetek i 16% na umorzenie.

Rozwiązanie: rata umorzeniowa wynosić wówczas będzie
 $4\% + 16\% = 20\%$ kapitału t. j. Zł 4.000.—.

Na zasadzie wzoru: $K = A \cdot a_{\overline{n}|}$
 obliczymy czas, w którym dług zostanie umorzony

$$20000 = 4000 \cdot a_{\overline{n}|}$$

$$a_{\overline{n}|} = 5$$

$$\text{skąd } n = 5,694 \text{ lat.}$$

Odpowiedź wskazuje, że należy zapłacić 5 rat pełnych i szóstą niepełną. Teraźniejsza wartość tej ostatniej będzie równać się różnicy między obecną wartością całego długu a obecną wartością pięciu rat pełnych.

$$\begin{aligned} \text{A więc } x &= 20000 - 4000 \cdot a_{\overline{5}|} \\ &= 20000 - 17807.29 \\ &= 2192.71 \end{aligned}$$

Natomiast jej wartość w terminie płatności wynosiłaby

$$x \cdot r^{5,694} = 2192.71 \times r^{5,694}$$

Zwykle jednak płacimy ostatnią niepełną ratę w końcu najbliższego roku, tutaj więc zapłacilibyśmy ją w końcu 6. roku

$$\begin{aligned} x \cdot r^6 &= 2192.71 \times 1,265319 \\ &= 2774.48. *) \end{aligned}$$

*) Wartość ostatniej niepełnej raty możemy obliczyć również, sprowadzając na koniec ostatniego roku wartość całego długu i pełnych rat. Dług Zł 20.000.— po 6 latach wyniósłby

$$\begin{aligned} 20000 \cdot r^6 &= 20.000 \times 1,265319 \\ &= 25306.38 \end{aligned}$$

wartość 5 pełnych rat po 6 latach wynosiłaby

$$\begin{aligned} 4000 (S_{\overline{6}|}^1 - S_{\overline{1}|}^1) &= 4000 \cdot S_{\overline{5}|}^1 \\ &= 4000 \times 5,632975 \\ &= 22531.90 \end{aligned}$$

wobec tego ostatnia rata wyniesie

$$25306.38 - 22531.90 = 2774.48.$$

Plan amortyzacyjny tego długu przybierze postać następującą:

Rata umorzeniowa 4.000.—

Rok	Stan długu na początku każdego roku	Z raty umorzeniowej przypada na		Stan długu w końcu każdego roku
		odsetki	kwotę umorz.	
1	2	3	4	5
1.	20.000.—	800.—	3.200.—	16.800.—
2.	16.800.—	672.—	3.328.—	13.472.—
3.	13.472.—	538.88	3.461.12	10.010.88
4.	10.010.88	400.44	3.599.56	6.411.32
5.	6.411.32	256.45	3.743.55	2.667.77
6.	2.667.77	106.71	2.667.77	—
		2.774.48	20.000.—	

Ostatnia rata wynosi

$$2.667.77 + 106.71 = 2.774.48.$$

Dłużnik zapłaci: na spłatę kapitału Zł 20.000.—
tytułem odsetek „ 2.774.48

Razem **Zł 22.774.48**

t.j. 5 rat po 4.000.— Zł 20.000.—
ostatnia rata „ 2.774.48

Razem **Zł 22.774.48**

Zadanie 83. 4% pożyczkę Zł 1.000.000.— umorzono w następujący sposób: przez pierwsze cztery lata spłacano po Zł 100.000.—, a przez następne lata — po Zł 300.000.—. Ułożyć plan amortyzacyjny dla ostatnich 3 lat.

(Odp. Ostatnia niepełna rata wynosiła Zł 201.782.32).

Zadanie 84. Dług, który możnaby spłacić przy 4% siedmioma ratami rocznymi, z których trzy pierwsze wynosiły po Zł 100.000.—, a cztery ostatnie po Zł 300.000.—, umorzono przy 3% ratami rocznymi, wynoszącymi Zł 400.000.—. Wypracować plan umorzenia.

(Odp. Czwarta i ostatnia niepełna rata Zł 128.480.94).

Zadanie 85. Aby spłacić dług $\text{Zł } 1.000.000.$ — zaciągnięty przy 4% tworzone fundusz umorzeniowy, składając przy 2% półrocznie zdolu po $\text{Zł } 50.000$ — i płacąc osobno bieżące odsetki. Po 5 latach zapłacono uzbieraną sumę, zaokrąglając ją wzwyż do najbliższych pełnych $\text{Zł } 100.000.$ — celem umorzenia reszty przy 3% ratami rocznymi wynoszącymi 10% kapitału pierwotnego. Wypracować plan umorzenia.

(Odp. Piąta i ostatnia rata wynosi $\text{Zł } 32.796.05$).

Zadanie 86. Stan długu, spłacanego przy 3% w 20 ratach rocznych wynosi na początku 8. roku $\text{Zł } 200.000.$ — W ile lat możnaby umorzyć to zobowiązanie przy 4% , płacąc po $\text{Zł } 60.000$ — rocznie i ile wyniesie ostatnia rata? Ułożyć plan amortyzacyjny.

(Odp. Szósta i ostatnia rata wynosi $\text{Zł } 16.039.92$).

Zadanie 87. Celem spłaty długu $\text{Zł } 100.000.$ — zaciągniętego przy 4% tworzone fundusz umorzeniowy, składając w końcu każdego roku po $\text{Zł } 2.000.$ — i płacąc odrębnie bieżące odsetki. Po 20 latach zapłacono uzbieraną sumę, dodając $\text{Zł } 443.84$ i zaczęto umarzać resztę długu 10 rocznymi ratami, z których pierwsze 5 były dwa razy większe niż następne 5. Jaki był rozmiar rat?

(Odp. mniejsza rata wynosiła $\text{Zł } 3.184.03$).

Zadanie 88. Kwota umorzeniowa pożyczki, spłacanej przy 4% w 40 rocznych ratach, wynosiła w przedostatnim roku $\text{Zł } 467.118.07$. Po umorzeniu pierwszych 10 rat tej pożyczki spłacono dodatkowo $\text{Zł } 736.538.72$ i skonwertowano resztę na pożyczkę spłacaną przy 2% ratami półrocznymi, wynoszącymi $\text{Zł } 500.000.$ — W ile lat umorzono dług i ile zapłacono w ostatnim półroczu?

(Odp. w 20. i ostatnim półroczu zapłacono $\text{Zł } 238.894.30$).

Zadanie 89. Kwota umorzeniowa pożyczki, spłacanej w 16 ratach rocznych przy 4% wynosi w 11 roku $\text{Zł } 9.500.$ — W ile lat można umorzyć ten dług, płacąc po $\text{Zł } 12.500.$ — rocznie przy 4% i ile wyniesie wtedy ostatnia rata?

(Odp. 16. i ostatnia rata wynosi $\text{Zł } 2.035.81$).

Zadanie 90. Odsetki pierwszych czterech rat umorzenia pożyczki Zł 150.000.— spłacalnej w 15 ratach przy 4% umieszczano w miarę ich otrzymywania w przedsiębiorstwie na 5% rocznie. Po 6 latach przedsiębiorstwo zostało zlikwidowane. Wierzycielowi wypłacono tylko 80% złożonych sum. Jaka sumę wycofał wierzyciel z przedsiębiorstwa?

(Odp. Zł 21.125).

4) Umarzanie pożyczek wyrażonych w obligacjach.

Bardzo często państwa, kraje, miasta, gminy lub prywatne przedsiębiorstwa zaciągają pożyczki od społeczeństwa drogą subskrypcji. Na zadeklarowane sumy wydają wtedy swym wierzycielom dowody zwane obligacjami lub listami zastawnymi. Zobowiązują się przytem w ciągu określonego czasu spłacić zaciągnięty dług ratami drogą stopniowego wykupu tych dokumentów przy pomocy losowania.

Obligacje mogą być wykupywane w pełnej wartości (nominalnej), wyższej albo niższej. Przy układaniu planu amortyzacyjnego takich pożyczek musimy pamiętać, aby kwoty umorzeniowe były wyrażone w sumach zaokrąglonych, odpowiadających sumom, na jakie wydano obligacje.

a) Wykup podług wartości nominalnej.

Przykład 43. Miasto zaciąga pożyczkę Zł 100.000.—, wyrażoną w 1000 obligacjach po Zł 100.—, zobowiązując się spłacić ją w przeciągu 6 lat przy 4%. Ułożyć plan amortyzacyjny pożyczki.

Rozwiązanie: Rata umorzeniowa tej pożyczki

$$A = 19076.19$$

(patrz przykład na str. 67)

plan umorzenia będzie następujący:

Rata umorzeniowa: 19076.19

Rok	Stan długu na początku każdego roku	Z raty umorzeniowej przypada na		Kwota umorzeniowa, zwiększona o pozostałość z roku poprzed. oprocent. za 1. rok	Podlega umorzeniu		pozostałość na rok następny	pozostałość na rok następny. oprocentowana za 1. rok
		odsetki	kwotę umorzeniową		obligacyj	na sumę		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	100.000.—	4.000.—	15.076.19	15.076.19	150	15.000.—	76,19	79.24
2.	85.000.—	3.400.—	15.676.19	15.755.43	157	15.700.—	55 43	57.65
3.	69.300.—	2.772.—	16.304.19	16.361.84	163	16.300.—	61.84	64.31
4.	53.000.—	2.120.—	16.956.19	17.020.50	170	17.000.—	20.50	21.32
5.	36.000.—	1.440.—	17.636.19	17.657.51	176	17.600.—	57.51	59.81
6.	18.400.—	736.—	18.340.19	18.400.—	184	18.400.—	—	—
					1.000	1.00000.—		

Jeżeli reszta wypadnie większa od połowy na jaką wydano obligacje (tutaj więcej niż 50 zł.) można ją zaokrąglić wzwyż zamiast zostawiać do następnego roku, odliczając w następnym roku odpowiednią nadwyżkę.

Zadanie 91. Wypracować plan umorzenia serji I. 10% polskiej Pożyczki Kolejowej, gdy wiadomo, że suma pożyczki wynosiła fr. zł. 100.000.000.—, oprocentowanie 5% półrocznie, amortyzacja w ratach półrocznych, począwszy od 1. sierpnia 1924 r. przez lat 10, przyczem pożyczka jest wyrażona w obligacjach, z których najmniejsze opiewają na 10 fr. zł.

(Odp. 20. kwota umorzeniowa Zł 7.642.160.—).

Zadanie 92. Wypracować plan umorzenia pożyczki Zł. 1.000.000.— wyrażonej w obligacjach po Zł 100.— każda i zaciągniętej przy 3% na lat 40 dla pierwszych dwóch lat. Obliczyć następnie w ciągu ilu lat można umorzyć resztę pozostałą po zapłaceniu 20 pierwszych rat, spłacając rocznie po Zł 100.000.—, i ile obligacji pozostanie na ostatni rok.

(Odp. w 8. roku należy umorzyć resztę t.j. 261 obligacyj)

Zadanie 93. Znaleźć wartość dzisiejszą wszystkich obligacyj pożyczki Zł 1.000.000.— umarzalnej przez 20 lat przy 4% oraz dzisiejszą wartość odsetek pożyczki i ustalić w jakim stosunku znajdują się te wartości do sumy pożyczki.

(Odp. Zł 645.803.— i Zł 354.197.—).

b) Wykup podług wartości wyższej niż nominalna.

Jeżeli pożyczka ma być spłacana podług wartości wyższej niż nominalna, ustala się tę nadwyżkę w procentach wartości nominalnej albo w ułamku kwoty umorzeniowej. Oznaczmy ten dodatek przez α (np. dodatek 20% jest $\frac{1}{5}$ kwoty umorzeniowej i $\alpha = \frac{1}{5}$). Jeżeli tak jak poprzednio K będzie oznaczać sumę pożyczki, A — ratę całkowitą, p — stopę procentową,

$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ — kwoty umorzeniowe, to przy $i = \frac{p}{100}$

będziemy mogli napisać, że

w pierwszym roku

$$A = K \cdot i + U_1 + \alpha \cdot U_1$$

w drugim roku

$$A = K_1 \cdot i + U_2 + \alpha \cdot U_2$$

Z powyższych dwóch równań wyznaczmy kwoty umorzeniowe U_1 i U_2 i znajdziemy stosunek pomiędzy nimi.

Otóż

$$U_1 = \frac{A - K \cdot i}{1 + \alpha}$$

$$U_2 = \frac{A - K_1 \cdot i}{1 + \alpha}$$

lecz

$$K_1 = K - U_1, \text{ więc}$$

$$U_2 = \frac{A - (K - U_1) \cdot i}{1 + \alpha}$$

albo podstawiając wartość U_1 , otrzymamy

$$U_2 = \frac{A - \left(K - \frac{A - K \cdot i}{1 + \alpha} \right) \cdot i}{1 + \alpha}$$

i w dalszym ciągu

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \frac{A - K \cdot i + \frac{A \cdot i - K \cdot i^2}{1 + \alpha}}{1 + \alpha} \\
 &= \frac{A + \frac{A \cdot i}{1 + \alpha} - K \cdot i - \frac{K \cdot i^2}{1 + \alpha}}{1 + \alpha} \\
 &= \frac{A \left(1 + \frac{i}{1 + \alpha}\right) - K \cdot i \left(1 + \frac{i}{1 + \alpha}\right)}{1 + \alpha} \\
 &= \frac{A - K \cdot i}{1 + \alpha} \left(1 + \frac{i}{1 + \alpha}\right) \\
 &= U_1 \cdot \left(1 + \frac{i}{1 + \alpha}\right)
 \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\frac{U_2}{U_1} = 1 + \frac{i}{1 + \alpha}$$

Tymczasem przy umarzaniu według wartości nominalnej

$$\frac{U_2}{U_1} = r, \text{ gdzie } r = 1 + i$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$r_i = 1 + \frac{i}{1 + \alpha}$$

wówczas

$$i_i = \frac{i}{1 + \alpha}$$

uwzględniając $i = \frac{p}{100}$ oraz $i_i = \frac{p_1}{100}$, otrzymamy nową stopę oprocentowania

$$p_1 = \frac{p}{1 + \alpha}$$

Obliczmy teraz ratę całkowitą A w zależności od dodatku α i stopy rzeczywistej p_1

Ponieważ $K = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1 \\ U_2 &= U_1 \cdot r_i \\ U_3 &= U_1 \cdot r_i^2 \\ U_4 &= U_1 \cdot r_i^3 \\ &\vdots \\ U_{n-1} &= U_1 \cdot r_i^{n-2} \\ U_n &= U_1 \cdot r_i^{n-1} \end{aligned}$$

możemy napisać, że

$$K = U_1 (1 + r_i + r_i^2 + r_i^3 + \dots + r_i^{n-2} + r_i^{n-1})$$

a więc

$$K = U_1 \cdot S_{i, \overline{n}|}$$

Ponieważ

$$A = K \cdot i + U_1 + \alpha \cdot U_1$$

więc po podstawieniu wartości U_1

$$A = K \cdot i + \frac{K}{S_{i, \overline{n}|}} (1 + \alpha)$$

Uwzględniając $i = (r_i - 1) (1 + \alpha)$ oraz $S_{i, \overline{n}|} = \frac{r_i^n - 1}{r_i - 1}$,
otrzymamy, że

$$\begin{aligned} A &= K \left[(r_i - 1) (1 + \alpha) + \frac{r_i - 1}{r_i^n - 1} (1 + \alpha) \right] \\ &= K \cdot (1 + \alpha) \cdot \frac{(r_i - 1) (r_i^n - 1) + (r_i - 1)}{r_i^n - 1} \end{aligned}$$

W dalszym ciągu

$$\begin{aligned} A &= K \cdot (1 + \alpha) \cdot \frac{(r_i - 1) (r_i^n - 1 + 1)}{r_i^n - 1} \\ &= K \cdot (1 + \alpha) \cdot \frac{r_i^n \cdot (r_i - 1)}{r_i^n - 1} \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$A = K \cdot (1 + \alpha) \cdot \frac{1}{\alpha, \overline{n}|}$$

Weźmy naprzód przykład pożyczki niewyrażonej w obligacjach.

Przykład 44. Pożyczkę Zł 500.000.— należy umorzyć w przeciągu 10 lat ratami półrocznymi z 25% dodatkem przy 2½% półrocznie. Ułożyć plan umorzenia.

Rata całkowita takiej pożyczki

$$A = K (1 + \alpha) \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|p_1}} \text{ przy stopie } p_1 = \frac{p}{1 + \alpha}$$

Ponieważ

$$p_1 = \frac{2,5}{1,25}$$

$$p_1 = 2\%$$

$$\text{to } A = 500.000 \times 1,25 \cdot \frac{1}{a_{\overline{20}|2\%}} \text{ przy } 2\%$$

$$= 625.000 \times 0,06115672$$

skąd **A = 38.222.95.**

Na podstawie tej raty całkowitej układamy plan umorzenia mając na uwadze, że w każdym półroczu różnica między ratą całkowitą A i odpowiednimi odsetkami, liczonemi przy 2½%, dzieli się na kwotę umorzeniową i dodatek w stosunku jak 4 do 1.

Rata umorzeniowa 38.222.95

Półroczna	Stan długu na początku półroczna	Z raty umorzeniowej przypada na		Z sumy B przypada na		Stan długu w końcu półroczna
		odsetki (2½%)	Kwotę umorzeniową wraz z 25% dod. (B)	25% dodatek $\frac{1}{5}$	kwotę umorzen. $\frac{4}{5}$	
1	2	3	4	5	6	7
1.	500.000.—	12.500.—	25.722.95	5.144.59	20.578.36	479.421.64
2.	479.421.64	11.985.54	26.237.41	5.247.48	20.989.93	458.431.71
3.	458.431.71	11.460.79	26.762.16	5.352.43	21.409.73	437.021.98
4.	437.021.98	10.925.55	27.297.40	5.459.48	21.837.92	415.184.06
5.	415.184.06	10.379.60	27.843.35	5.568.67	22.274.68	392.909.38
6.	392.909.38	9.822.74	28.400.21	5.680.04	22.720.17	370.189.21
7.	370.189.21	9.254.73	28.968.22	5.793.64	23.174.58	347.014.63
8.	347.014.63	8.675.37	29.547.58	5.909.52	23.638.06	323.376.57
9.	323.376.57	8.084.42	30.138.53	6.027.71	24.110.82	299.265.75
10.	299.265.75	7.481.64	30.741.31	6.148.26	24.593.05	274.672.70
11.	274.672.70	6.866.83	31.356.12	6.271.22	25.084.90	249.587.80
12.	249.587.80	6.239.69	31.983.26	6.396.65	25.586.61	224.001.19
13.	224.001.19	5.600.03	32.622.92	6.524.58	26.098.34	197.902.85
14.	197.902.85	4.947.57	33.275.38	6.655.08	26.620.30	171.282.55
15.	171.282.55	4.282.07	33.940.88	6.788.18	27.152.70	144.129.85
16.	144.129.85	3.603.25	34.619.70	6.923.94	27.695.76	116.434.09
17.	116.434.09	2.910.85	35.312.10	7.062.42	28.249.68	88.184.41
18.	88.184.41	2.204.61	36.018.34	7.203.67	28.814.67	59.369.74
19.	59.369.74	1.484.25	36.738.70	7.347.74	29.390.96	29.978.78
20.	29.978.78	749.47	37.473.48	7.494.70	29.978.78	—
		139.459.—		125.000.—	500.000.—	

Każdą pozycję powyższego planu umorzenia możnaby zgóry wyliczyć na podstawie następujących własności:

- 1) Kwoty umorzeniowe wzrastają w stosunku czynnika r , przy stopie procentowej p_1 i wobec tego, zgodnie z wzorami poprzednimi, napiszemy, że

$$U_n = U_1 \cdot r^{n-1}$$

- 2) Mając na uwadze dodatek α , możemy podać zależność między kwotą umorzeniową ostatniego okresu i ratą całkowitą

$$A = U_n \cdot (1 + \alpha) \cdot r,$$

albo, podstawiając wartość U_n ,

$$A = U_1 \cdot (1 + \alpha) \cdot r^n$$

- 3) W takim razie kwota umorzeniowa w dowolnym okresie m

$$U_m = U_1 \cdot r^{m-1}$$

lecz
$$U_1 = \frac{A \cdot v_1^n}{1 + \alpha}$$

więc
$$U_m = \frac{A \cdot v_1^n \cdot r^{m-1}}{1 + \alpha}$$

i ostatecznie
$$U_m = \frac{A \cdot v_1^{n-m+1}}{1 + \alpha}$$

- 4) Stan długu w końcu każdego okresu będzie można określić jako różnicę między stanem początkowym K a wartością skapitalizowaną kwot umorzeniowych już spłaconych.

Zatem stanu długu po m okresach (na początku $m + 1$ okresu)

$$K_m = K - U_1 \cdot S_{\overline{1}|m|}$$

Stan długu K_m możemy jeszcze wyrazić, jako wartość zdyskontowaną rat pozostałych do spłacenia. W tym celu we wzór powyższy podstawimy wartość U_1 :

$$K_m = K - \frac{A \cdot v_1^n \cdot S_{\overline{1}|m|}}{1 + \alpha}$$

lub, uwzględniając $v_i^n = v_i^m \cdot v_i^{n-m}$ oraz

$$v_i^m \cdot S_{i,n}^{1,m} = a_{i,n} \quad \text{napiszemy}$$

$$K_m = K - \frac{A \cdot v_i^{n-m} \cdot a_{i,n}}{1 + \alpha}$$

lecz $v_i^{n-m} \cdot a_{i,n} = a_{i,n} - a_{i,n-m}$, a więc

$$K_m = K - \frac{A \cdot (a_{i,n} - a_{i,n-m})}{1 + \alpha}$$

Ponieważ
$$K = \frac{A \cdot a_{i,n}}{1 + \alpha}$$

Zatem
$$K_m = \frac{A \cdot a_{i,n}}{1 + \alpha} - \frac{A (a_{i,n} - a_{i,n-m})}{1 + \alpha}$$

i ostatecznie
$$K_m = \frac{A \cdot a_{i,n-m}}{1 + \alpha}$$

5) Zastanówmy się jeszcze nad wartością dodatków. Jeżeli d_1 oznaczać będzie kwotę dodatku 1. okresu, to wartość skapitalizowana wszystkich dodatków, wypłacanych w ciągu n okresów będzie stanowić α część długu K :

$$d_1 + d_1 r + d_1 r^2 + d_1 r^3 + \dots + d_1 \cdot r_i^{n-3} + d_1 \cdot r_i^{n-2} + d_1 \cdot r_i^{n-1} = K \cdot \alpha$$

albo
$$d_1 \cdot S_{i,n}^{1,1} = K \cdot \alpha$$

skąd
$$d_1 = \frac{K \cdot \alpha}{S_{i,n}^{1,1}}$$

Aby otrzymać wartość dzisiejszą dodatków należy je zdykontować na odpowiedni okres czasu

$$W = d_1 \cdot v_i + d_1 r \cdot v_i^2 + d_1 \cdot r_i^2 \cdot v_i^3 + \dots + d_1 \cdot r_i^{n-2} \cdot v_i^{n-1} + d_1 \cdot r_i^{n-1} \cdot v_i^n$$

po uproszczeniu

$$W = d_1 v_i + d_1 \cdot v_i + d_1 \cdot v_i + \dots + d_1 v_i + d_1 v_i + d_1 v_i$$

skąd
$$W = n \cdot d_1 \cdot v_i$$

Wreszcie wartość dodatków pozostałych do zapłacenia po m okresach będzie równa $n-m$ —krotnej wartości dodatku po m okresach $d_m = d_1 \cdot r_1^m$, zdyskontowanej na jeden okres

$$W_m = (n-m) \cdot d_1 \cdot r_1^{m-1}$$

Należy przytem zauważyć, że wysokość dodatku w m . okresie $d_m = d_1 \cdot r_1^m$ można także obliczyć ze wzoru $d_m = \alpha \cdot U_m$ po podstawieniu wartości U_m :

$$d_m = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot A \cdot v_1^{n-m+1}$$

W takim razie

$$d_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot A \cdot v_1^n$$

i wobec tego

$$W = n \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot A \cdot v_1^{n+1}$$

oraz

$$W_m = (n-m) \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot A \cdot v_1^{n-m+1}$$

Przykład 45. Pożyczkę Zł 500.000.— wyrażoną w obligacjach po Zł 100.— każda należy umorzyć ratami półrocznymi w ciągu 10 lat przy $2\frac{1}{2}\%$ półrocznie, płacąc przy wykupie Zł 125.— za każdą obligację. Ułożyć plan umorzenia.

Ponieważ dane liczbowe są te same co w przykładzie poprzedzającym, bierzemy ratę umorzeniową $A = 38.222.95$, pamiętając przy układaniu planu o zaokrągłaniu kwot umorzeniowych do pełnych setek a dodatków do pełnych 25-tek.

Pozostałość z każdego półrocza dodatnią lub ujemną oprocentowujemy przy $p_1 = \frac{p}{1+\alpha} = 2\%$. W ostatniem półroczu otrzymamy groszowe reszty z powodu koniecznych zaokrągłań.

Rata umorzeniowa: 38.222.95

Półrocza	Stan długu na początku półrocza	Z raty umorzeniowej przy- pada na		Kwotę umorze- nia w z 250/0 dotatk.	Kwota umorzen. wraz z 25 proc. dodatkem zwiększ. wzgl. zmniej- szona o różnicę z półr. poprzedn. oprocento- waną za półrocze (B)	Z sumy B przypada na		Podlega umo- rzeniu		250/0 dodatek wypła- ny przy wykupu obligacji	Stan długu w końcu półrocza	Pozostałość na następne półro- cze dodatnia lub ujemna		14
		odsetki (2 1/2%)	4			250/0 dodatek 1 5	kwotę umorze- nia w z 250/0 4 5	na sumę nomi- nalną	z kwo- ty umo- rzeni- 12			z 250/0 do- datku 13		
1	500.000.—	12.500.—	25.722.95	25.722.95	5.144.59	20.578.36	206	20.600.—	5.150.—	479.400.—	-21.64	5.41	-27.59	Obydwie pozosta- łości oprecnt. za półrocze przy 2%
2	479.400.—	11.985.—	26.237.95	26.210.35	5.242.07	20.958.29	210	21.000.—	5.250.—	458.400.—	-31.71	7.93	-40.43	
3	458.400.—	11.450.—	26.762.95	26.722.52	5.344.50	21.378.02	214	21.400.—	5.350.—	437.000.—	-21.98	5.50	-28.03	
4	437.000.—	10.925.—	27.297.95	27.269.92	5.453.98	21.815.94	218	21.800.—	5.450.—	415.200.—	+15.94	3.98	+20.32	
5	415.200.—	10.380.—	27.842.95	27.853.27	5.572.65	22.290.52	223	22.300.—	5.575.—	392.900.—	-9.38	2.35	-11.96	
6	392.900.—	9.822.50	28.400.45	28.388.49	5.677.70	22.710.79	227	22.700.—	5.675.—	370.200.—	+10.79	2.70	+13.76	
7	370.200.—	9.255.—	28.957.95	28.981.71	5.796.34	23.185.37	232	23.200.—	5.800.—	347.000.—	-14.63	3.66	-18.66	
8	347.000.—	8.675.—	29.547.95	29.529.29	5.905.85	23.623.43	236	23.600.—	5.900.—	323.400.—	+23.43	5.86	+29.88	
9	323.400.—	8.085.—	30.137.95	30.167.83	6.033.57	24.134.26	241	24.100.—	6.025.—	299.300.—	+34.26	8.57	+43.69	
10	299.300.—	7.482.50	30.740.45	30.784.14	6.156.83	24.627.31	246	24.600.—	6.150.—	274.700.—	+27.31	6.83	+34.82	
11	274.700.—	6.867.50	31.355.45	31.390.27	6.278.05	25.112.22	251	25.100.—	6.275.—	249.600.—	+12.22	3.05	+15.58	
12	249.600.—	6.210.—	31.982.95	31.998.53	6.393.71	25.598.82	255	25.600.—	6.400.—	224.000.—	-1.18	-2.29	-1.50	
13	224.000.—	5.600.—	32.622.95	32.621.45	6.524.29	26.097.16	261	26.100.—	6.525.—	197.900.—	-2.84	-7.71	-3.62	
14	197.900.—	4.947.50	33.272.45	33.271.83	6.654.37	26.617.46	266	26.600.—	6.650.—	171.300.—	+17.45	4.37	+22.27	
15	171.300.—	4.282.50	33.940.45	33.952.92	6.792.58	27.170.34	272	27.200.—	6.800.—	144.100.—	-29.66	7.42	-37.82	
16	144.100.—	3.602.50	34.620.45	34.582.63	6.916.53	27.665.10	277	27.700.—	6.925.—	116.400.—	-33.99	8.47	-43.22	
17	116.400.—	2.910.—	35.312.95	35.269.73	7.053.95	28.215.78	282	28.200.—	7.050.—	88.200.—	+15.78	3.95	+20.12	
18	88.200.—	2.205.—	36.017.95	36.033.07	7.207.61	28.830.46	288	28.800.—	7.200.—	59.400.—	+30.46	7.61	+38.83	
19	59.400.—	1.485.—	36.737.95	36.776.78	7.355.36	29.441.22	294	29.400.—	7.350.—	30.000.—	+21.42	5.36	+27.32	
20	30.000.—	750.—	37.472.95	37.500.27	7.500.05	30.000.22	300	30.000.—	7.500.—	—	-22	+5.05	—	
		139 460.—			5000	500 000.—	125.000 —							

Obydwie pozosta-
łości procent. za
półrocze przy 2⁰/₀

ROZDZIAŁ VI.

Kurs pożyczek.

1) Obligacje wykupywane równymi ratami w równych odstępach czasu drogą losowania.

Suma na jaką opiewa obligacja pożyczki przedstawia wysokość udziału w pożyczce i nazywa się wartością nominalną. Natomiast suma, za którą nabywamy, względnie sprzedajemy obligację, nazywa się wartością kursową.

Jeśli wartość kursowa równa się nominalnej, mówimy, że obligacja stoi „al pari“, gdy jest wyższą — stoi „wyżej pari“, gdy niższą — „niżej pari“.

Kurs zwykle podaje się w procentach wartości nominalnej. Wartość kursowa pożyczki na rynku pieniężnym uwarunkowana jest przede wszystkim stopą procentową zwaną stopą rzeczywistą. Gdy stopa rynkowa (rzeczywista) jest wyższa od stopy nominalnej, pożyczkę będzie można sprzedać po kursie niższym od wartości nominalnej, gdy natomiast stopa rzeczywista jest niższa od nominalnej, pożyczka może osiągnąć kurs wyższy od wartości nominalnej.

Jeżeli K oznaczać będzie wartość nominalną pożyczki, a K^1 — wartość rzeczywistą, to kurs k wyrażony w procentach wartości nominalnej wyniesie

$$k = \frac{K^1}{K} \cdot 100$$

Ograniczając się narazie do omówienia zwykłych pożyczek amortyzacyjnych, napiszemy, że

$$K = A \cdot a_{\overline{n}|} \text{ przy stopie nominalnej } p\%$$

$$K^1 = A \cdot a_{\overline{n}|}^1 \text{ „ „ rzeczywistej } p_1\%$$

W takim razie kurs

$$k = \frac{a_{\overline{n}|}^1}{a_{\overline{n}|}} \cdot 100$$

Przykład 46. Po jakim kursie nabyć można 3% pożyczkę, spłacalną w ciągu 20 lat przy rzeczywistej stopie oprocentowania 4%?

Rozwiązanie: Kurs obliczamy na zasadzie wzoru

$$k = \frac{a_{\overline{n}|}^1}{a_{\overline{n}|}} \times 100$$

Ponieważ $a_{\overline{20}|} = 13,59033$ przy 4%

i $a_{\overline{20}|}^1 = 14,87747$ „ 3%

$$k = \frac{13,59033}{14,87747} \times 100$$

$$\text{albo w/g tabl. V.} = 13,59033 \times 0,06722 \times 100 \\ = 91.35.$$

Przykład 47. Jaki był kurs tej pożyczki po spłaceniu 8 rat?

Rozwiązanie: Kurs pożyczki na początku okresu umarzania był najniższy i z biegiem czasu wzrasta aż do wartości nominalnej.

Aby obliczyć kurs po 8 latach zwracamy uwagę na pozostałe 12 rat i wówczas

$$k = \frac{a_{\overline{12}|}^1}{a_{\overline{12}|}} \times 100$$

$$= \frac{9,38507}{9,95400} \times 100$$

$$= 9,38507 \times 0,10046 \times 100$$

$$= 94.28.$$

Przykład 48. Dla pożyczki Zł 500.000.—, której plan umorzenia jest zamieszczony w przykładzie 44. (str. 78), obliczyć kurs na początku okresu umarzania i po latach 9.

W obu terminach ustalamy kurs jako stokrotny iloraz wartości rzeczywistej przez wartość nominalną.

- a) wartość nominalna w chwili obecnej wynosi Zł 500.000.—
 „ „ po 9 latach (na pocz. 10. roku) „ 299.265.75

Drugą liczbę bierzemy albo z planu umorzenia albo wyliczamy ze wzoru

$$K_9 = \frac{A \cdot a_{\overline{20-9}|}}{1 + \alpha}$$

w którym $A = 38.222.95$, $\alpha = 0,25$, $a_{\overline{11}|} = 9,7868481$ przy

$$p_1 = \frac{p}{1 + \alpha} = \frac{2,5}{1,25} = 2\%$$

- b) wartość rzeczywista składa się z wartości nominalnej i wartości wszystkich dodatków.

Na początku okresu umarzania wartość dodatków określamy ze wzoru

$$W = n \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha} A \cdot v_i^{n+1}$$

Po podstawieniu

$$A = 38.222.95, \alpha = \frac{1}{4},$$

$$n = 20, v^{21} = 0,65977582 \quad \text{przy } 2\% \text{ otrzymamy}$$

$$W = 100.874.29$$

Po 9 latach wartość pozostałych 11-tu dodatków obliczamy na podstawie wzoru

$$W_m = (n - m) \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot A \cdot v_i^{n-m+1}$$

skąd $W_9 = 66.304.78$

Wobec tego wartość rzeczywista

na początku okresu umarzania	po 9 latach
500.000.—	299.265.75
+ 100.874.29	+ 66.304.78
<u>600.874.29</u>	<u>365.570.53</u>

skąd kurs

$$\begin{aligned} k &= \frac{600.874.29}{500.000.—} & k_9 &= \frac{365.570.53}{299.265.75} \\ &= 120.17 & &= 122.16 \end{aligned}$$

Jak widzimy kurs wzrasta, dążąc do granicznej wartości 125.

Na podstawie wzoru

$$k = \frac{a^{1-n}}{a_n} \cdot 100$$

możemy określić stopę rzeczywistą papieru procentowego, gdy wiadoma jest stopa nominalna, liczba okresów umorzenia i kurs. Ta stopa rzeczywista zwana rentownością papieru procentowego stanowi całkowity dochód, jaki dany papier przynosi w czasie od chwili jego nabycia do chwili realizacji w terminie umorzenia, obliczany w stosunku rocznym w odsetkach wartości kursowej w chwili kupna.

W poniższych przykładach zajmiemy się obliczaniem rentowności tych polskich pożyczek państwowych, które należą do typu zwykłych pożyczek amortyzacyjnych.

Przykład 49. Obliczyć na $\frac{2}{8}$ 1927 r. rentowność 10% Pożyczki Kolejowej przy kursie 102.60, jeśli wiadomo, że pożyczka jest umarzalna w ratach półrocznych przy 5% półrocznie przez lat 10 poczynawszy od $\frac{1}{8}$ 1924 r.

Ponieważ 7 rat zostało już zapłaconych, pozostaje do umorzenia 13 rat. W takim razie

$$102.60 = \frac{a^{1-13}}{a_{13}} \times 100$$

$$\text{skąd } a^{1-13} = 9,583805898$$

i przez interpolację

$$p_1 = 4,68\% \text{ półrocznie}$$

albo w przybliżeniu $p = 9,36\%$ rocznie

(według obliczenia dokładnego rentowność wynosi 9,15%).

Przykład 50. Obliczyć na $\frac{1}{2}$ 1928 r. rentowność 5% Pożyczki Konwersyjnej przy kursie 67, jeśli wiadomo, że pożyczka umarzalna jest w ratach półrocznych przez lat 20 poczynawszy od 1/7 1925 r.

Obliczając w przybliżeniu wystarczy przyjąć $2\frac{1}{2}\%$ jako stopę półroczną dostosowaną względną. Przy tej stopie procentowej uwzględnimy w rachunku pozostałe 34 raty.

$$67 = \frac{a_{34}^{\frac{1}{2}}}{a_{34}} \cdot 100$$

$$a_{34}^{\frac{1}{2}} = 0,67 \times 22,8152192$$

stad przez ekstrapolację

$$p_1 = 5,41\% \text{ półrocznie}$$

albo w przybliżeniu

$$p = 10,82\% \text{ rocznie}$$

(obliczenie dokładne daje wynik 11,06%)

Przykład 51. Obliczyć na $\frac{1}{2}$ 1928 r. rentowność 5% Pożyczki Konwersyjnej Kolejowej przy kursie 61, gdy wiadomo, że pożyczka jest umarzalna w ratach półrocznych przez lat 40 poczynawszy od 1/7 1927 r.

Zastosujemy znowu stopę dostosowaną względną $2\frac{1}{2}\%$ i pamiętać będziemy, że do wskazanego terminu już 2 raty pożyczki umorzono.

$$61 = \frac{a_{78}^{\frac{1}{2}}}{a_{78}} \cdot 100$$

Biorąc czynniki z tablicy dla 78 półroczy, otrzymamy

$$a_{78}^{\frac{1}{2}} = 34,1709 \times 0,61$$

$$\text{skąd } p_1 = 4,67\% \text{ półrocznie}$$

$$\text{albo } p = 9,34\% \text{ rocznie}$$

(dokładnie rentowność wynosiła 9,33%)

Przykład 52. Obliczyć rentowność 7% Pożyczki Stabilizacyjnej na początku okresu umarzania, jeżeli wiadomo, że pożyczka została wypuszczona na nominalną sumę \$ 71.720.000.— (\$ 62.000.00.— i £ 2.000 000.) po kursie 92 z warunkiem spłaty jej w 40-tu ratach półrocznych, licząc 103 za 100.

Ustalamy najpierw ratę całkowitą

$A = 3.412.867.92$ ze wzoru $A = K \cdot (1 + \alpha) \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$, następnie dodatek $d_1 = 26.291.30$ oraz wartość obecną dodatków $W = 40 \times 26.291.30 \times v$ celem obliczenia kursu $k = \frac{K + W}{K} = 101.42$. Jeżeli uwzględnimy teraz kurs emisyjny 92 to setna część iloczynu tych dwóch liczb da nam kurs 93.31, który pozwoli obliczyć stopę rzeczywistą podług wzoru $k = \frac{a_{\overline{n}|}^{1+n}}{a_{\overline{n}|}} \cdot 100$

Szukana stopa wyniesie 3,93% półrocznie, a więc rentownością pożyczki będzie w przybliżeniu 7,86% w stosunku rocznym.

2) Obligacje wykupywane drogą jednorazowej spłaty w ściśle określonym terminie.

Jeżeli dłużnik ma spłacić całe zobowiązanie w jednym terminie, to w czasie od chwili emisji pożyczki (daty zaciągnięcia długu) do chwili umorzenia długu płaci tylko bieżące odsetki.

Przypuśćmy, że pożyczka będzie wykupiona po kursie $100 + \varphi$. W takim razie wartością rzeczywistą papieru opiewającego nominalnie na 100 jednostek kapitału będzie suma wartości dzisiejszej odsetek płatnych w ciągu n okresów $p \cdot a_{\overline{n}|}^{1+n}$ i wartości obecnej obligacji $(100 + \varphi) \cdot v_1^n$, obliczona przy stopie rzeczywistej p_1 . Stąd kurs

$$k = \frac{p \cdot a_{\overline{n}|}^{1+n} + (100 + \varphi) \cdot v_1^n}{100} \cdot 100$$

Obliczenie kursu według tego wzoru przy danej stopie rzeczywistej nie przedstawia trudności. Natomiast ponieważ nie można przekształcić powyższego wyrażenia tak, aby bezpośrednio

otrzymać wartość algebraiczną stopy rzeczywistej p_1 (rentowności), musimy dokonać obliczenia tej ostatniej drogą podstawiania we wzór kolejnych wartości p_1 póty, póki nie znajdzie się taka wartość p_1 , przy której równanie się sprawdzi.*)

Przykład 53. Obliczyć na $1/4$ 1927 r. rentowność 6% Pożyczki Dolarowej przy kursie 85,75 jeśli wiadomo, że kupony tej pożyczki są płatne $1/4$ i $1/10$, a pożyczka sama podlega jednorazowemu wykupowi w dniu $1/4$ 1940 r. po kursie 100 za 100.

We wzór

$$k = \frac{p \cdot a^{1-n} + (100 + \varphi) v_1^n}{100} \cdot 100$$

podstawiamy $k = 85,75$, $p = 3$, $n = 26$ (13 lat), $\varphi = 0$

$$85,75 = 3 \cdot a^{1-26} + 100 \cdot v_1^{26}$$

Równanie to sprawdza się przy $p_1 = 3,885$, a więc rentowność Pożyczki Dolarowej obliczona w stosunku rocznym jest 7,77%.

Z pośród polskich pożyczek państwowych notowanych na Gieldzie Warszawskiej pozostały jeszcze dwie pożyczki: 5% Pożyczka Premjowa („dolarówka“) i 4% Pożyczka Inwestycyjna. Jednakowoż pominiemy je, ponieważ obydwie są pożyczkami premjowymi i z tego względu nie nadają się do obliczania ich rentowności.

3) Kurs parytetowy.

Jeżeli państwo, miasto lub gmina pragnie zaciągnąć pożyczkę, otrzymuje rozmaite oferty od banków, które zobowiązują się dostarczyć potrzebną sumę, przeprowadzając na swoje ryzyko subskrypcję wśród społeczeństwa. Na podstawie zgłoszonych ofert należy się zorientować, która z nich jest najdogodniejsza.**)

Rozważmy to zagadnienie na przykładzie następującym:

*) Stanisław Pszczółkowski. Rentowność papierów procentowych w Polsce (Konjunktura Gospodarcza, kwiecień 1928).

**) W jesieni 1927 r. byliśmy świadkami pertraktacyj, dotyczących warunków emisji Polskiej Pożyczki Stabilizacyjnej.

Przykład 54. Gmina, zamierzająca zaciągnąć pożyczkę Zł 1.000.000.—, umarzalną równymi rocznymi ratami w ciągu 40 lat, ma do wyboru albo pożyczkę 4%-wą przy kursie emisyjnym 90, albo pożyczkę 5%-wą przy kursie emisyjnym 100. Która propozycja jest korzystniejsza?

Jeżeli mamy przeprowadzić obliczenie według pierwszej oferty, to najpierw musimy określić sumę nominalną K , gdy rzeczywista jest $K^1 = 1.000.000$.—

Z równania

$$\begin{aligned} k &= \frac{K^1 \cdot 100}{K} \\ &= \frac{1.000.000 \times 100}{90} \\ &= 1.111.111.11. \end{aligned}$$

W takim razie

$$\begin{aligned} A &= K \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \text{ przy } 4\% \\ &= 1.111.111.11 \times 0,05052349 \\ &= 56.137.28 \end{aligned}$$

Gdy przyjmiemy tę samą ratę $A = 56.137.28$ dla drugiej oferty, to wówczas nominalna suma pożyczki wynosiłaby

$$\begin{aligned} K &= A \cdot a_{\overline{n}|} \text{ przy } 5\% \\ &= 56.137.28 \times 17,1590864 \\ &= 963.265.30 \end{aligned}$$

Na tej podstawie kurs

$$\begin{aligned} k &= \frac{K^1 \cdot 100}{K} \\ &= \frac{1.000.000}{963.265.30} \times 100 \\ &= 103,81 \end{aligned}$$

Kurs taki, obliczony przy 5% i odpowiadający kursowi 90 przy 4%, nazywać będziemy kursem parytetowym. Jest on w tym wypadku wyższy od proponowanego 100, a więc pierwsza oferta jest korzystniejsza.

Odwrotnie, dla kursu 100 przy 5% możemy obliczyć kurs parytetowy przy 4% **86,69**, który będzie mniej korzystnym od proponowanego 90.

$$\begin{aligned}
 \text{Obliczenie: } K_1 &= \frac{K_1^1 \cdot 100}{k_1} \\
 &= \frac{1.000.000 \times 100}{100} \\
 &= 1.000.000 \\
 A' &= K_1 \cdot \frac{1}{a_{n|}} \text{ przy } 5\% \\
 &= 1.000.000 \times 0,05827816 \\
 &= 58.278.16 \\
 K &= A \cdot a_{n|} \text{ przy } 4\% \\
 &= 58.278.16 \times 19,7927739 \\
 &= 1.153.485.05 \\
 k &= \frac{K^1}{K} \cdot 100 \\
 &= \frac{1.000.000}{1.153.485.05} \times 100 \\
 &= \mathbf{86.69}
 \end{aligned}$$

Wskazany sposób porównywania różnych warunków emisji pożyczek przy pomocy kursów parytetowych jest dogodny i przejrzysty. Jednakże i bez obliczenia tych kursów można ustalić, które warunki z proponowanych są korzystniejsze, poprzestając jedynie na obliczeniu rat umorzeniowych.

W naszym przykładzie:

- 1) dla pożyczki 4% suma nominalna wynosiła 1.111.111,11,
a więc rata

$$A = 56.137.28$$

- 2) dla pożyczki 5% sumie nominalnej 1.000.000 odpowiada
rata

$$A' = 58.278.16$$

Wynika stąd, że oferta pożyczki 4% po kursie emisyjnym 90 jest korzystniejsza, bo chociaż większą sumę nominalną będziemy winni, rata umorzeniowa będzie mniejsza z powodu niższej stopy procentowej.

4) Konwersja.

Przez konwersję pożyczek pojmujemy w zasadzie zamianę pożyczki o wyższym oprocentowaniu na pożyczkę o niższym oprocentowaniu. W wypadku takiej zamiany sumą wyjściową będzie nominalna suma pożyczki zamienianej w chwili konwersji. Jeżeli stopa rzeczywista (rynkowa) spada poniżej nominalnej t. j. gdy kurs pożyczki stoi „wyżej pari“, taka konwersja jest możliwa i zapewnia dłużnikowi zyski.

W odmiennych warunkach odbywały się dotychczasowe konwersje pożyczek państwowych w Polsce. Istniejące bowiem dwie pożyczki konwersyjne powstały jedynie z konieczności zamiany zobowiązań w innych walutach na zobowiązania wyrażone w walucie złotowej. Przy zamianie stopę nominalną pozostawiono prawie we wszystkich wypadkach bez zmiany, zwiększając zato okres umarzania. Dlatego istotną cechą tej konwersji jest raczej przewalutowanie, które, jeżeli naraziło wierzycieli na straty, było wynikiem układu powojennych stosunków.

Wysokość emisji 5% Pożyczki Konwersyjnej ustalono w przybliżeniu na Zł 150.000.000.—, przewidując spłatę w 40 ratach półrocznych poczynsz od 1/7 1925 r. Natomiast 5% Pożyczka Konwersyjna Kolejowa będzie umorzona w 80 ratach półrocznych, licząc od 1/7 1927 r.; wysokość jej emisji określono na Zł 50.000.000.—. Plany umorzenia obydwu pożyczek zostały ogłoszone w Dzienniku Ustaw Rzeczypospolitej Polskiej.

Przykład 55. Pożyczkę Zł 500.000.— umarzalną przy 5%, w ciągu 36 lat zamieniamy po 6 latach na pożyczkę 4%-wą. Po jakim najwyższym kursie można dokonać konwersji?

Ustalamy najpierw ratę umorzeniową

$$\begin{aligned} A &= K \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \\ &= 500.000 \times 0,06043446 \\ &= 30.217.23 \end{aligned}$$

a następnie wartość nominalną pożyczki w momencie konwersji:

$$\begin{aligned} K_6 &= 30.217.23 \times a_{\overline{30}|} \text{ przy } 5\% \\ &= 30.217.23 \times 15,37245103 \\ &= 464.512.89 \end{aligned}$$

Jeżeliby dłużnik miał spłacać pożyczkę nadal ratami po Zł 30.217.23, to przy 4% wartość dzisiejsza pozostałych 30 rat byłaby większa

$$\begin{aligned} K &= A \cdot a_{\overline{30}|} \text{ przy } 4\% \\ &= 30.217.23 \times 17,29203330 \\ &= 522.517.35 \end{aligned}$$

Stąd najwyższy kurs w chwili konwersji

$$\begin{aligned} k &= \frac{522.517,35}{464.512.89} \times 100 \\ &= 112.49 \end{aligned}$$

Przeprowadzając konwersję przy tak obliczonym kursie dłużnik nicby nie zyskał. Dopiero przy kursie niższym dłużnik osiąga korzyści, płacąc niższą ratę umorzeniową. Wysokość takiego kursu zwanego kursem konwersyjnym zależy od stanu rynku pieniężnego w momencie konwersji. Możliwym jest nawet wypadek konwersji po kursie 100, tak jak to uczyniono we Francji w 1883 r., zamieniając 5%-ową rentę na 4%-ową.

Powróćmy do naszego przykładu i obliczmy ratę umorzeniową, przyjmując kurs konwersyjny $k = 100$

Wówczas

$$\begin{aligned} A &= K \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \\ &= 464.512.89 \times 0,05783010 \\ &= 26.862.63 \end{aligned}$$

Przykład 56. Pożyczkę Zł 100.000.— umarzalną przy 4% w 25 rocznych ratach zamieniono po upływie 10 lat na pożyczkę spłacalną w 30 ratach rocznych przy stopie procentowej rzeczywistej 4%, nominalnej 3%. Znaleźć kurs pożyczki konwersyjnej i ratę umorzeniową.

Obliczamy naprzód ratę

$$A = 6401.20$$

następnie stan długu na początku 11. roku

$$\begin{aligned} K_{10} &= 6401.20 \times a_{\overline{15}|} \\ &= 6401.20 \times 11,118374 \\ &= 71.171.02 \end{aligned}$$

Dług ten mamy umorzyć w 30 ratach rocznych przy stopie rzeczywistej 4%, nominalnej 3%.

A więc kurs konwersyjny

$$\begin{aligned} k &= \frac{a_{\overline{30}|}^1}{a_{\overline{30}|}} \times 100 \\ &= 17,292 \times 0,0510193 \times 100 \\ &= 88,22 \end{aligned}$$

Według tego kursu ustalamy sumę nominalną pożyczki konwersyjnej

$$\begin{aligned} K &= \frac{K^1 \cdot 100}{k} \\ &= \frac{71.171.02}{88.22} \times 100 \\ &= 80.674.47 \end{aligned}$$

oraz ratę umorzeniową

$$\begin{aligned} A &= K \cdot a_{\overline{30}|} \text{ przy } 3\% \\ &= 80.674.47 \times 0,05101926 \\ &= 4115.95. \end{aligned}$$

Przykład 57. Pożyczkę Zł 1.000.000.— umarzalną przy 5% z dodatkiem 25% przez 30 lat skonwertować po 10 latach na pożyczkę spłacalną przy 4% z dodatkiem 20%. Określić najwyższy kurs konwersyjny oraz ratę umorzeniową przy kursie 100.

Rate całkowitą obliczamy ze wzoru:

$$A = K(1 + \alpha) \cdot \frac{1}{a_{\overline{30}|}}$$

$$\text{posiłkując się stopą procentową } p_1 = \frac{n}{1 + \alpha} = \frac{5}{1,25} = 4.$$

$$\begin{aligned} A &= 1.250.000 \times 0,05783010 \\ &= 72.287.63 \end{aligned}$$

Należy teraz określić wartość nominalną pożyczki wraz z dodatkiem w momencie konwersji. Ponieważ bez dodatku wartość nominalna długu wynosić będzie po 10 latach

$$K_{10} = \frac{A \cdot a_{\overline{30}-10}|}{1 + \alpha}$$

to uwzględniając dodatek α , otrzymamy wartość nominalną

$$\begin{aligned} K_{10}^1 &= K_{10} \cdot (1 + \alpha) \\ K_{10}^1 &= A \cdot a_{\overline{20}|} \\ &= 72.287.63 \times 13,5903263 \\ &= 982.412.41. \end{aligned}$$

Dla obliczenia najwyższego kursu konwersyjnego, który zupełnie nie przynosi dłużnikowi zysków, przyjmujemy nową ratę równą dotychczasowej i wobec tego

$$K'(1 + \alpha) = A \cdot a_{\overline{n}|}$$

przyczem $\alpha = 0,2$, $A = 72.287.63$, $n = 20$, $a_{\overline{n}|} = 14,4484254$

$$(\text{przy stopie zredukowanej } \frac{4}{1 + 0,2} = 3\frac{1}{3}\%).$$

A więc wartość nominalną pożyczki konwersyjnej wraz z dodatkami wynosiłaby

$$\begin{aligned} K'(1 + \alpha) &= 72.287.63 \times 14,4484254 \\ &= 1.044.442.43 \end{aligned}$$

Ostatecznie najwyższy kurs konwersyjny

$$\begin{aligned} k &= \frac{1.044.442.43}{982.412.41} \times 100 \\ &= 106.31. \end{aligned}$$

Jeżeli przyjmiemy kurs konwersyjny $k = 100$, to wypadnie obliczyć ratę całkowitą pożyczki konwersyjnej według wzoru

$$K \cdot (1 + \alpha) = A' \cdot a_{\overline{n}|}$$

w którym $K(1 + \alpha) = K_{10} = A \cdot a_{\overline{20}|}$ przy 4% , $n = 20$, $\frac{1}{a_{\overline{20}|}} = 0,06933772$ (przy $3\frac{1}{3}\%$). W takim razie

$$\begin{aligned} A' &= 72.287.63 \times 13,5903263 \times 0,06933772 \\ &= \mathbf{68.118.24.} \end{aligned}$$

Należy przytem zauważyć, że do ułożenia planu umorzenia pożyczki konwersyjnej koniecznem jest obliczenie sumy nominalnej K bez uwzględnienia dodatków ze wzoru

$$\begin{aligned} K(1 + \alpha) &= A \cdot a_{\overline{20}|} \text{ przy } 4\% \\ K &= \frac{982.412.41}{1,2} \\ &= \mathbf{818.677.01} \end{aligned}$$

5) Konsole.

Istnieją pożyczki jak np. renty państwowe, które przynoszą tylko roczny dochód i nie podlegają umorzeniu. Są to pożyczki wieczne (konsole). Kurs ich zależy tylko od stopy procentowej nominalnej i rzeczywistej.

Można go wyprowadzić z równania:

$$k = \frac{a_{\overline{1}|n}}{a_{\overline{1}|n}} \times 100$$

zakładając $n \rightarrow \infty$. Wówczas, ponieważ $v_1^n \rightarrow 0$ i $v^n \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} k &= \left[v_1 \frac{1 - v_1^n}{1 - v_1} : v \frac{1 - v^n}{1 - v} \right] \times 100 \\ &= \frac{v_1}{1 - v_1} \times \frac{1 - v}{v} \times 100 \\ &= \frac{\frac{1}{r_1}}{1 - \frac{1}{r_1}} \times \frac{1 - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r}} \times 100 \\ &= \frac{r - 1}{r_1 - 1} \times 100 \end{aligned}$$

$$\text{ale } r - 1 = \frac{p}{100}; \quad r_1 - 1 = \frac{p_1}{100}$$

wobec tego kurs

$$k = \frac{P}{P_1} \times 100$$

Przykład 58. 4% renta państwowa przynosi 5% dochodu. Po jakim kursie można ją nabyć?

Z równania

$$\begin{aligned} k &= \frac{p}{p_1} \times 100 \\ &= \frac{4}{5} \times 100 \\ &= 80. \end{aligned}$$

Zadanie 94. Pożyczkę spłacalną w 20 ratach rocznych wydano po kursie 91.7 przy stopie nominalnej 4%. Jaki był kurs tej pożyczki po zapłaceniu 8 rat? (Odp. 94.44).

Zadanie 95. Obliczyć kurs 3% pożyczki Zł 100.000.— umarzalnej w 40 ratach rocznych z dodatkiem 10% przy wykupie obligacji przy stopie rzeczywistej 5% a) na początku okresu umarzania, b) po latach dwudziestu. (Odp. a) 78,32, b) 90,06).

Zadanie 96. Pożyczka Zł 5.000.000.— wyrażona w 50.000 sztuk obligacji po Zł 100.— każda ma być umorzona w 20 półrocznych ratach po Zł 150.— za każdą obligację stuzłotową przy stopie nominalnej 3%, rzeczywistej 4% półrocznie. Obliczyć pozycje planu umorzenia oraz kurs pożyczki w 15-tym półroczu. Kiedy będzie umorzona połowa obligacji?

(Odp. $K_{14} = 1.712.825.71$, $P_{15} = 51.384.77$, $d_{15} = 135.763.54$.
 $U_{15} = 271.527.09$, $k_{14} = 141.89$, po 10 półroczach).

Zadanie 97. Pewna pożyczka umorzona przy 4% w ciągu 15 lat osiągała kursy zależnie od stopy rynkowej, wynoszącej przez pierwsze 5 lat 4½%, a przez następne 10—5%. Ile wynosiłaby stopa rzeczywista stała w całym okresie umorzenia? (Odp. 4,92%).

Zadanie 98. Jakiemu kursowi odpowiada rentowność 4% półrocznie pożyczki, która będzie spłacona jednorazowo po kursie Zł 120.— za lat 15, jeżeli kupony pożyczki są płatne dwa razy do roku zdołu od chwili emisji w stosunku 3% półrocznie.

(Odp. 88,87).

Zadanie 99. Pożyczkę Zł 2.000.000.— spłacano ratami półrocznymi przez lat 30 z dodatkiem 25% przy stopie nominalnej 5% półrocznie. Znaleźć w jakim stosunku jest wartość dzisiejsza obligacji pożyczki do sumy pożyczki oraz obliczyć kurs emisyjny.

(Odp. 24,24%; 106,06).

Zadanie 100. Instytucja, poszukująca Zł 5.000.000.— na spłaty roczne w ciągu 30 lat, otrzymuje dwie oferty: 3% pożyczkę po kursie 80 i 4% — po kursie 90. Która oferta jest korzystniejsza?

Zadanie 101. Pożyczkę na Zł 3.000.000.—, umarzalną w ciągu 45 lat, bank podejmuje się przejąć po kursie $97\frac{1}{2}$ przy 4%. Jaki kurs może zaproponować inny bank, który liczy $3\frac{1}{2}$ %?

(Odp. ponad 89).

Zadanie 102. 5%-wą pożyczkę Zł 3.000.000.— umarzalną w 15 ratach rocznych zamieniono po upływie 10 lat na inną, spłacaną ratami półrocznymi w ciągu lat 20 przy stopie nominalnej 2% z dodatkiem 20%. Obliczyć ratę pożyczki konwersyjnej.

(Odp. Zł 51.839,22).

Zadanie 103. Obliczyć rentowość 6% pożyczki wiecznej przy kursie 72.

ROZDZIAŁ VII.

Ubezpieczenie od strat spowodowanych losowaniem amortyzacyjnem.

Stopniowy wykup obligacyj pożyczki odbywa się zazwyczaj drogą losowania według przyjętego planu umorzenia. A zatem w terminach wskazanych w planie posiadacze wylosowanych obligacyj otrzymują za nie ich wartość nominalną. Jeśli wówczas kurs pożyczki na giełdzie jest wyższy od nominalnego, posiadacz wylosowanej obligacji ponosi stratę równą różnicy między wartością kursową a nominalną. W celu uniknięcia tych strat można przed terminem losowania albo sprzedać obligacje albo je ubezpieczyć od wylosowania. W wypadku drugim instytucje przeprowadzające to ubezpieczenie (banki) zobowiązują się do zapłaty po kursie bieżącym za każdą obligację wylosowaną.

1) Premja netto płatna przez cały okres umorzenia.

Rozważmy najpierw wypadek najprostszy, kiedy wszyscy posiadacze obligacyj pragną je ubezpieczyć od wylosowania na cały okres umarzania pożyczki i obliczmy ile wówczas należy zapłacić jednorazowo za ubezpieczenie jednej obligacji, czyli ile będzie wynosiła t. zw. premja netto.

Niech O oznacza ogólną liczbę obligacyj, a $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ — liczby obligacyj, wykupywanych w końcu każdego okresu przez n okresów; wówczas

$$O = O_1 + O_2 + O_3 + \dots + O_n$$

a następnie na podstawie zależności między kwotami umorzeniowymi

$$\begin{aligned} O_1 &= O_1 \\ O_2 &= O_1 \cdot r \\ O_3 &= O_1 \cdot r^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ O_{n-1} &= O_1 \cdot r^{n-2} \\ O_n &= O_1 \cdot r^{n-1} \end{aligned}$$

dobawając stronami, otrzymamy:

$$O = O_1 \cdot S_{\overline{n}|r}$$

Jeżeli w powyższym szeregu każdą liczbę obligacji odpowiednio zdyskontujemy, otrzymamy w sumie wartość dzisiejszą wszystkich obligacji:

$$O_1 \cdot v + O_1 \cdot r \cdot v^2 + O_1 \cdot r^2 \cdot v^3 + \dots + O_1 \cdot r^{n-2} \cdot v^{n-1} + O_1 \cdot r^{n-1} \cdot v^n = O_1 n \cdot v$$

Gdy przez s oznaczymy stratę na wylosowanej obligacji, to wartość dzisiejsza W wszystkich strat spowodowanych wylosowaniem w ciągu n okresów wyrazi się wzorem

$$W = s \cdot n \cdot O_1 \cdot v$$

Na jedną obligację wypadnie wobec tego strata w chwili obecnej, czyli premja netto

$$\begin{aligned} P &= \frac{W}{O} \\ &= \frac{s \cdot n \cdot O_1 \cdot v}{O_1 \cdot S_{\overline{n}|r}} \\ P &= s \times \frac{n \cdot v}{S_{\overline{n}|r}} \end{aligned}$$

Gdyby wszystkie obligacje ubezpieczono dopiero w $m+1$ okresie, to odpadłaby strata, przypadająca na obligacje pierwszych m okresów i wówczas

$$\begin{aligned} W_m &= s \cdot (n-m) \cdot O_{m+1} \cdot v \\ P_m &= \frac{W_m}{O - \sum_1^m O} \\ &= \frac{s \cdot (n-m) \cdot O_{m+1} \cdot v}{O_{m+1} \cdot S_{\overline{n-m}|r}} \end{aligned}$$

skąd

$$P_m = s \times \frac{(n-m) \cdot v}{S_{n-m}^1}$$

Tak obliczoną premję jednorazową P można rozłożyć na premje okresowe π płatne zgóry przez n okresów bez względu na moment wylosowania obligacji na zasadzie równania

$$\pi \cdot a_{\overline{n}|} = P$$

z którego

$$\pi = \frac{P}{a_{\overline{n}|}}$$

Przykład 59. 4% pożyczka Zł 20.000.— będzie umorzona w ciągu 4 lat ratami rocznymi przy spłacie Zł 100.— za każdą obligację stułotową. Obliczyć jednorazową premję netto dla każdego roku oraz premję roczną, gdy kurs giełdowy pożyczki był 125.—.

Przypuśćmy, że wszystkie obligacje ubezpieczono w 1. roku, to

$$\begin{aligned} P &= 25 \times \frac{4 \times 0,96154}{4,24646} & \pi &= \frac{P}{a_{\overline{4}|}} \\ &= 22.64 & &= 6.— \end{aligned}$$

Gdyby wszystkie obligacje ubezpieczono dopiero w 2. roku, to

$$\begin{aligned} P &= 25 \times \frac{3 \times 0,96154}{3,1216} \\ &= 23.10 \end{aligned}$$

Ubezpieczając w 3. roku, otrzymalibyśmy

$$\begin{aligned} P &= 25 \times \frac{2 \times 0,96154}{2,04} \\ &= 23.56 \end{aligned}$$

Wreszcie w 4. roku (po 3 latach) otrzymamy

$$\begin{aligned} P &= 25 \times \frac{1 \times 0,96154}{1} \\ &= 24.04 \end{aligned}$$



2) Premja netto zmienna płatna do chwili wylosowania.

Dotychczas obliczaliśmy premje za cały okres, w ciągu którego losowanie napewno nastąpi, a zysk ubezpieczającego obligacje polegał jedynie na potrąceniu dyskonta od straty. Tymczasem w rzeczywistości każdy płaci premje tylko do chwili wylosowania jego obligacyj i tym sposobem wchodzi w grę ryzyko, bowiem ubezpieczenie może kosztować mniej niż strata na wylosowaniu lub więcej.

Jeżeli chcemy obliczyć premję dla każdego okresu oddzielnie, to należy znaleźć zdyskontowaną wartość strat w danym okresie i podzielić ją przez liczbę obligacyj, jakie w tym okresie pozostaną.

A więc

$$\text{dla 1. okresu: } W = s \cdot O_1 \cdot v; \quad O = O_1 \cdot S_{n|}^1; \quad \pi = s \cdot \frac{v}{S_{n|}^1}$$

$$\text{" 2. " } W_1 = s \cdot O_2 \cdot v; \quad O - O_1 = O_2 \cdot S_{n-1|}^1; \quad \pi_1 = s \cdot \frac{v}{S_{n-1|}^1}$$

$$\text{" 3. " } W_2 = s \cdot O_3 \cdot v; \quad O - (O_1 + O_2) = O_3 \cdot S_{n-2|}^1; \quad \pi_2 = s \cdot \frac{v}{S_{n-2|}^1}$$

$$\text{" } m \text{ " } W_{m-1} = s \cdot O_m \cdot v; \quad O - \sum_{O_1}^{O_{m-1}} O = O_m \cdot S_{n-m+1|}^1; \quad \pi_{m-1} = s \cdot \frac{v}{S_{n-m+1|}^1}$$

$$\text{" } m+1 \text{ " } W_m = s \cdot O_{m+1} \cdot v; \quad O - \sum_{O_1}^{O_m} O = O_{m+1} \cdot S_{n-m|}^1; \quad \pi_m = s \cdot \frac{v}{S_{n-m|}^1}$$

Przykład 60. Obliczyć wszystkie premje roczne, płatne do chwili wylosowania dla pożyczki, danej w przykładzie poprzedzającym.

W pierwszym roku

$$\begin{aligned} \pi &= 25 \times \frac{0,96154}{4,24646} \\ &= 5,66 \end{aligned}$$

W drugim roku

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 25 \times \frac{0,96154}{3,1216} \\ &= 7.70\end{aligned}$$

W trzecim roku

$$\begin{aligned}\pi_2 &= 25 \times \frac{0,96154}{2,04} \\ &= 11.78\end{aligned}$$

W czwartym roku

$$\begin{aligned}\pi_3 &= 25 \times \frac{0,96154}{1} \\ &= 24.04\end{aligned}$$

A więc wszyscy ubezpieczający swe obligacje płacą w 1 roku po Zł 5.66 za każdą obligację. Część z nich mianowicie posiadacze O_1 obligacji otrzymują z powodu wylosowania po Zł 25.—, zarabiając po Zł 19.34 (25.— — 5.66). Reszta płaci w drugim roku po Zł 7.70. Znowu posiadacze O_2 obligacji wylosowanych otrzymują po Zł 25.—, zyskując Zł 11.64 [25.— (5.66+7.70)]. Podobnie w 3 roku pozostali płacą po Zł 11.78, przyczem posiadacze O_3 obligacji tracą z powodu wylosowania Zł .—14 [25.— — (5.66+7.70+11.78)]. Wreszcie w 4 roku reszta posiadaczy płaci po Zł 24.04 za każdą obligację, tracąc ogółem Zł 24.58 [25.— — (5.66+7.70+11.78+24.04)].

Z powyższego zestawienia widać, że występuje tu moment ryzyka, spowodowany płaceniem premji tylko do chwili wylosowania danej obligacji.

3) Premja netto stała płatna do chwili wylosowania.

Zamiast dotychczasowych premij wzrastających z biegiem czasu możemy obliczyć także premję netto stałą, jeżeli porównamy w chwili obecnej wartość dzisiejszą wszystkich strat spowodowanych wylosowaniem obligacji z wartością dzisiejszą tych wszystkich premij netto, które ubezpieczeni płacić mają do chwili wylosowania obligacji przez nich posiadanych.

Wartość dzisiejszą wszystkich strat, spowodowanych wylosowaniem w ciągu n okresów wyraża wzór

$$W = s \cdot O_1 \cdot n \cdot v$$

Celem obliczenia wartości dzisiejszej wszystkich premij netto ustalamy ile obligacyj pozostaje w każdym okresie do umorzenia i zakładamy, że wszystkie te obligacje zostaną ubezpieczone przez ich posiadaczy.

Gdy przez N oznaczymy wartość nominalną obligacji, to liczba obligacyj w każdym okresie wyrazi się ilorazem stanu długu w danym okresie przez N . A więc

na początku liczba obligacyj pozostałych do umorz. wynosi						$\frac{A \cdot a_{n }}{N}$
po 1. okresie	„	„	„	„	„	$\frac{A \cdot a_{n-1 }}{N}$
„ 2. okresach	„	„	„	„	„	$\frac{A \cdot a_{n-2 }}{N}$

„ m .	„	„	„	„	„	$\frac{A \cdot a_{n-m }}{N}$

„ $n-2$.	„	„	„	„	„	$\frac{A \cdot a_{2 }}{N}$
„ $n-1$	„	„	„	„	„	$\frac{A \cdot a_{1 }}{N}$

Przypuśćmy, że za ubezpieczenie każdej obligacji płacono premję π . W takim razie wartością dzisiejszą wszystkich tych premij będzie

$$W = \frac{A}{N} a_{n|} \cdot \pi + \frac{A}{N} \cdot a_{n-1|} \pi \cdot v + \frac{A}{N} a_{n-2|} \cdot \pi \cdot v^2 + \dots$$

$$+ \frac{A}{N} \cdot a_{2|} \pi \cdot v^{n-2} + \frac{A}{N} \cdot a_{1|} \cdot \pi \cdot v^{n-1}$$

$$= \frac{A}{N} \cdot \pi (a_{n|} + a_{n-1|} \cdot v + a_{n-2|} \cdot v^2 + \dots + a_{2|} \cdot v^{n-2} + a_{1|} \cdot v^{n-1})$$

lecz $a_{n-1|} \cdot v = a_{n|} - a_{1|}$; $a_{n-2|} \cdot v^2 = a_{n|} - a_{2|}$;

$$a_{2|} \cdot v^{n-2} = a_{n|} - a_{n-2|}; a_{1|} \cdot v^{n-1} = a_{n|} - a_{n-1|}$$

wobec tego

$$W = \frac{A}{N} \cdot \pi \cdot [a_{n|} + (a_{n|} - a_{1|}) + (a_{n|} - a_{2|}) + (a_{n|} - a_{3|}) + \dots$$

$$+ (a_{n|} - a_{n-2|}) + (a_{n|} - a_{n-1|})]$$

$$= \frac{A}{N} \cdot \pi \cdot [n \cdot a_{n|} - (a_{1|} + a_{2|} + a_{3|} + \dots + a_{n-2|} + a_{n-1|})]$$

Podstawiając $a_{1|} = v \cdot \frac{1-v}{1-v}$; $a_{2|} = v \cdot \frac{1-v^2}{1-v}$ i t. d., otrzymamy

$$\begin{aligned} W &= \frac{A}{N} \cdot \pi \left[n \cdot a_{n|} - \left(v \cdot \frac{1-v}{1-v} + v \cdot \frac{1-v^2}{1-v} + v \cdot \frac{1-v^3}{1-v} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + v \cdot \frac{1-v^{n-1}}{1-v} \right) \right] \\ &= \frac{A}{N} \cdot \pi \left\{ n \cdot a_{n|} - \frac{v}{1-v} \left[(1-v) + (1-v^2) + (1-v^3) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-v^{n-1}) \right] \right\} \\ &= \frac{A}{N} \cdot \pi \left\{ n \cdot a_{n|} - \frac{100}{p} \left[(n-1) - (v+v^2+v^3+\dots+v^{n-1}) \right] \right\} \\ &= \frac{A}{N} \cdot \pi \left\{ n \cdot a_{n|} - \frac{100}{p} \left[(n-1) - a_{n-1|} \right] \right\} \end{aligned}$$

zauważmy, że $A = U_1 \cdot r^n$ i $U_1 = N \cdot O_1$, wobec czego

$$\frac{A}{N} = O_1 \cdot r^n$$

Przyrównyując wartość dzisiejszą wszystkich premij do wartości dzisiejszej wszystkich strat, otrzymamy

$$s \cdot O_1 \cdot n \cdot v = O_1 \cdot r^n \cdot \pi \cdot \left\{ n \cdot a_{n|} - \frac{100}{p} \left[(n-1) - a_{n-1|} \right] \right\}$$

skąd ostatecznie w chwili obecnej

$$\pi = \frac{s \cdot n \cdot v}{r^n \cdot \left\{ n \cdot a_{n|} - \frac{100}{p} \left[(n-1) - a_{n-1|} \right] \right\}}$$

a po m okresach ciągnięcia

$$\pi_m = \frac{s \cdot (n-m) \cdot v}{r^{n-m} \cdot \left\{ (n-m) \cdot a_{n-m|} - \frac{100}{p} \left[(n-m-1) - a_{n-m-1|} \right] \right\}}$$

Przykład 61. Obliczyć premję roczną stałą dla pożyczki danej w przykładzie 58. w chwili obecnej, po roku, po dwóch i po trzech latach.

$$\pi = \frac{25 \cdot v \cdot 4}{r^4 \cdot \left\{ 4 \cdot a_{\overline{4}|} - \frac{100}{4} \left[3 - a_{\overline{3}|} \right] \right\}} = 9.24$$

$$\pi_1 = \frac{25 \cdot 3 \cdot v}{r^3 \cdot \left\{ 3 \cdot a_{\overline{3}|} - \frac{100}{4} \left[2 - a_{\overline{2}|} \right] \right\}} = 11.70$$

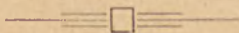
$$\pi_2 = \frac{25 \cdot 2 \cdot v}{r^2 \cdot \left\{ 2 \cdot a_{\overline{2}|} - \frac{100}{4} \left[1 - a_{\overline{1}|} \right] \right\}} = 15.81$$

$$\pi_3 = \frac{25 \cdot v}{r \cdot a_{\overline{1}|}} = 24.04$$

Zadanie 104. Pożyczka umarzalna w ciągu lat 20 przy 5% była notowana przez pierwsze 10 lat po 130 za 100, a przez następne 10 lat po 110. Jaką premję roczną musiałby płacić posiadacz obligacji, aby zabezpieczyć się od straty przed wylosowaniem przez pierwszy okres czasu i przez cały okres umorzeniowy?

(Odp. $\pi' = \frac{30 \cdot 10 \cdot v}{r^{10} \cdot \left[10 \cdot a_{\overline{20}|} - \frac{100}{5} (9 - a_{\overline{9}|}) \right]} = 1.24$

$$\pi'' = \frac{30 \cdot 10 \cdot v + 10 \cdot 10 \cdot v}{r^{20} \cdot \left[20 \cdot a_{\overline{20}|} - \frac{100}{5} (19 - a_{\overline{19}|}) \right]} = 1.29).$$



T A B L I C E.

TABLICA I.

Wartość po n okresach jednostki kapitału, oddanej na procent
składany: $r^n = (1 + i)^n$

n	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	n
1	1,0100.0000	1,0200.0000	1,0300.0000	1,0400.0000	1,0500.0000	1
2	1,0201.0000	1,0404.0000	1,0609.0000	1,0816.0000	1,1025.0000	2
3	1,0303.0100	1,0612.0800	1,0927.2700	1,1248.6400	1,1576.2500	3
4	1,0406.0401	1,0824.3216	1,1255.0881	1,1698.5856	1,2155.0625	4
5	1,0510.1005	1,1040.8080	1,1592.7407	1,2166.5290	1,2762.8156	5
6	1,0615.2015	1,1261.6242	1,1940.5230	1,2653.1902	1,3400.9564	6
7	1,0721.3535	1,1486.8567	1,2298.7387	1,3159.3178	1,4071.0042	7
8	1,0828.5671	1,1716.5938	1,2667.7008	1,3685.6905	1,4774.5544	8
9	1,0936.8527	1,1950.9257	1,3047.7318	1,4233.1181	1,5513.2822	9
10	1,1046.2213	1,2189.9442	1,3439.1633	1,4802.4428	1,6288.9463	10
11	1,1156.6835	1,2433.7431	1,3842.3387	1,5394.5406	1,7103.3936	11
12	1,1268.2503	1,2682.4179	1,4257.6089	1,6010.3222	1,7958.5633	12
13	1,1380.9328	1,2936.0663	1,4685.3371	1,6650.7351	1,8856.4914	13
14	1,1494.7421	1,3194.7876	1,5125.8972	1,7316.7645	1,9799.3160	14
15	1,1609.6896	1,3458.6834	1,5579.6742	1,8009.4351	2,0789.2818	15
16	1,1725.7864	1,3727.8570	1,6047.0644	1,8729.8125	2,1828.7459	16
17	1,1843.0443	1,4002.4142	1,6528.4763	1,9479.0050	2,2920.1832	17
18	1,1961.4748	1,4282.4625	1,7024.3306	2,0258.1652	2,4066.1923	18
19	1,2081.0895	1,4568.1117	1,7535.0605	2,1068.4918	2,5269.5020	19
20	1,2201.9004	1,4859.4740	1,8061.1123	2,1911.2314	2,6532.9771	20
21	1,2323.9194	1,5156.6634	1,8602.9457	2,2787.6807	2,7859.6259	21
22	1,2447.1586	1,5459.7967	1,9161.0341	2,3699.1879	2,9252.6072	22
23	1,2571.6302	1,5768.9926	1,9735.8651	2,4647.1554	3,0715.2376	23
24	1,2697.3465	1,6084.3725	2,0327.9411	2,5633.0416	3,2250.9994	24
25	1,2824.3199	1,6406.0599	2,0937.7793	2,6658.3613	3,3863.5494	25
26	1,2952.5631	1,6734.1811	2,1565.9127	2,7724.6978	3,5556.7269	26
27	1,3082.0888	1,7068.8748	2,2212.8901	2,8833.6858	3,7334.5632	27
28	1,3212.9097	1,7410.2421	2,2879.2768	2,9987.0332	3,9201.2914	28
29	1,3345.0388	1,7758.4469	2,3565.6551	3,1186.5145	4,1161.3560	29
30	1,3478.4892	1,8113.6158	2,4272.6247	3,2433.9751	4,3219.4238	30
31	1,3613.2740	1,8475.8882	2,5000.8035	3,3731.3341	4,5380.3949	31
32	1,3749.4068	1,8845.4059	2,5750.8276	3,5080.5875	4,7649.4147	32
33	1,3886.9009	1,9222.3140	2,6523.3524	3,6483.8110	5,0031.8854	33
34	1,4025.7699	1,9606.7603	2,7319.0530	3,7943.1634	5,2533.4797	34
35	1,4166.0276	1,9998.8955	2,8136.6245	3,9460.8899	5,5160.1537	35
36	1,4307.6878	2,0398.8734	2,8982.7833	4,1039.3255	5,7918.1614	36
37	1,4450.7647	2,0806.8509	2,9852.2668	4,2680.8986	6,0814.0694	37
38	1,4595.2724	2,1222.9879	3,0747.8348	4,4388.1345	6,3854.7729	38
39	1,4741.2251	2,1647.4477	3,1670.2698	4,6163.6599	6,7047.5115	39
40	1,4888.6373	2,2080.3966	3,2620.3779	4,8010.2063	7,0399.8871	40
41	1,5037.5237	2,2522.0046	3,3598.9893	4,9930.6145	7,3919.8815	41
42	1,5187.8989	2,2972.4447	3,4606.9589	5,1927.8391	7,7615.8755	42
43	1,5339.7779	2,3431.8936	3,5645.1677	5,4004.9527	8,1496.6693	43
44	1,5493.1757	2,3900.5314	3,6714.5227	5,6165.1508	8,5571.5028	44
45	1,5648.1075	2,4378.5421	3,7815.9584	5,8411.7568	8,9850.0779	45
46	1,5804.5885	2,4866.1129	3,8950.4372	6,0748.2271	9,4342.5818	46
47	1,5962.6344	2,5363.4351	4,0118.9503	6,3178.1562	9,9059.7109	47
48	1,6122.2603	2,5870.7039	4,1322.5183	6,5705.2824	10,4012.6965	48
49	1,6283.4834	2,6388.1179	4,2562.1944	6,8333.4937	10,9213.3313	49
50	1,6446.3182	2,6915.8803	4,3839.0602	7,1066.8335	11,4673.9978	50

TABLICA II.

Wartość teraźniejsza jednostki kapitału, płatnej po n okresach:

$$v^n = \frac{1}{r^n}$$

n	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	n
1	0,9900.990	0,9803.922	0,9708.738	0,9615.385	0,9523.810	1
2	0,9802.960	0,9611.688	0,9425.959	0,9245.562	0,9070.295	2
3	0,9705.901	0,9423.223	0,9151.417	0,8889.964	0,8638.376	3
4	0,9609.803	0,9238.454	0,8884.871	0,8548.042	0,8227.025	4
5	0,9514.657	0,9057.308	0,8626.088	0,8219.271	0,7835.262	5
6	0,9420.452	0,8879.714	0,8374.843	0,7903.145	0,7462.154	6
7	0,9327.181	0,8705.602	0,8130.915	0,7599.178	0,7106.813	7
8	0,9234.832	0,8534.904	0,7894.092	0,7306.902	0,6768.394	8
9	0,9143.398	0,8367.553	0,7664.167	0,7025.867	0,6446.089	9
10	0,9052.870	0,8203.483	0,7440.939	0,6755.642	0,6139.133	10
11	0,8963.237	0,8042.630	0,7224.213	0,6495.809	0,5846.793	11
12	0,8874.492	0,7884.932	0,7013.799	0,6245.971	0,5568.374	12
13	0,8786.626	0,7730.324	0,6809.513	0,6005.741	0,5303.214	13
14	0,8699.630	0,7578.750	0,6611.178	0,5774.751	0,5050.680	14
15	0,8613.495	0,7430.147	0,6418.620	0,5552.645	0,4840.171	15
16	0,8528.213	0,7284.458	0,6231.669	0,5339.082	0,4581.115	16
17	0,8443.775	0,7141.626	0,6050.165	0,5133.733	0,4362.967	17
18	0,8360.173	0,7001.594	0,5873.946	0,4936.281	0,4155.207	18
19	0,8277.399	0,6864.308	0,5702.860	0,4746.424	0,3957.340	19
20	0,8195.445	0,6729.713	0,5536.758	0,4563.870	0,3768.895	20
21	0,8114.302	0,6597.758	0,5375.493	0,4388.336	0,3589.424	21
22	0,8033.962	0,6468.390	0,5218.925	0,4219.554	0,3418.499	22
23	0,7954.418	0,6341.559	0,5066.918	0,4057.263	0,3255.713	23
24	0,7875.661	0,6217.215	0,4919.337	0,3901.215	0,3100.679	24
25	0,7797.684	0,6095.309	0,4776.056	0,3751.168	0,2953.028	25
26	0,7720.480	0,5975.793	0,4636.947	0,3606.892	0,2812.407	26
27	0,7644.039	0,5858.620	0,4501.891	0,3468.166	0,2678.483	27
28	0,7568.356	0,5743.746	0,4370.768	0,3334.775	0,2550.936	28
29	0,7493.421	0,5631.123	0,4243.464	0,3206.514	0,2429.463	29
30	0,7419.229	0,5520.709	0,4119.868	0,3083.187	0,2313.774	30
31	0,7345.771	0,5412.460	0,3999.872	0,2964.603	0,2203.595	31
32	0,7273.041	0,5306.333	0,3883.370	0,2850.579	0,2098.662	32
33	0,7201.031	0,5202.287	0,3770.263	0,2740.942	0,1998.725	33
34	0,7129.733	0,5100.282	0,3660.449	0,2635.521	0,1903.548	34
35	0,7059.142	0,5000.276	0,3553.834	0,2534.155	0,1812.903	35
36	0,6989.249	0,4902.232	0,3450.324	0,2436.687	0,1726.574	36
37	0,6920.049	0,4806.109	0,3349.829	0,2342.969	0,1644.356	37
38	0,6851.534	0,4711.872	0,3252.262	0,2252.854	0,1566.054	38
39	0,6783.697	0,4619.482	0,3157.536	0,2166.206	0,1491.480	39
40	0,6716.531	0,4528.904	0,3065.568	0,2082.890	0,1420.457	40
41	0,6650.031	0,4440.102	0,2976.280	0,2002.779	0,1352.816	41
42	0,6584.189	0,4353.041	0,2889.592	0,1925.749	0,1288.396	42
43	0,6518.999	0,4267.688	0,2805.429	0,1851.682	0,1227.044	43
44	0,6454.455	0,4184.007	0,2723.718	0,1780.464	0,1168.613	44
45	0,6390.549	0,4101.968	0,2644.386	0,1711.984	0,1112.965	45
46	0,6327.276	0,4021.537	0,2567.365	0,1646.139	0,1059.967	46
47	0,6264.630	0,3942.684	0,2492.588	0,1582.826	0,1009.492	47
48	0,6202.604	0,3865.376	0,2419.988	0,1521.948	0,0961.421	48
49	0,6141.192	0,3789.584	0,2349.503	0,1463.411	0,0915.639	49
50	0,6080.388	0,3715.279	0,2281.071	0,1407.126	0,0872.037	50

TABLICA III.

Wartość po n okresach jednostek kapitału, składanych na początku każdego okresu: $S_n = r \frac{r^n - 1}{r - 1}$

n	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	n
1	1,0100.0000	1,0200.0000	1,0300.0000	1,0400.0000	1,0500.0000	1
2	2,0301.0000	2,0604.0900	2,0909.0000	2,1216.0000	2,1525.0000	2
3	3,0604.0100	3,1216.0800	3,1836.2700	3,2464.6400	3,3101.2500	3
4	4,1010.0501	4,2040.4016	4,3091.3581	4,4163.2256	4,5256.3125	4
5	5,1520.1505	5,3081.2096	5,4684.0989	5,6329.7546	5,8019.1281	5
6	6,2135.3521	6,4342.8338	6,6624.6218	6,8982.9448	7,1420.0845	6
7	7,2856.7056	7,5829.6905	7,8923.3605	8,2142.2626	8,5491.0888	7
8	8,3685.2727	8,7546.2843	9,1591.0613	9,5827.9531	10,0265.6432	8
9	9,4622.1254	9,9497.2100	10,4638.7931	10,0061.0712	11,5778.9254	9
10	10,5668.3467	11,1687.1542	11,8077.9569	12,4863.5141	13,2067.8716	10
11	11,6825.0301	12,4120.8973	13,1920.2956	14,0258.0546	14,9171.2652	11
12	11,8093.2804	13,6893.3152	14,6177.9045	15,6268.3768	16,7129.8285	12
13	13,9474.2132	14,9739.3815	16,0863.2416	17,2919.1119	18,5986.3199	13
14	15,0968.9554	16,2934.1692	17,5989.1389	19,0235.8764	20,5785.6359	14
15	16,2578.6449	17,6392.8525	19,1568.8130	20,8245.3114	22,6574.9177	15
16	17,4304.4314	19,0120.7096	20,7615.8774	22,6975.1239	24,8403.6636	16
17	18,6147.4757	20,4123.1238	22,4144.3537	24,6454.1288	27,1323.8467	17
18	19,8108.9504	21,8405.5863	24,1168.6844	26,6712.2940	29,5390.0391	18
19	21,0190.0399	23,2973.6980	25,8703.7449	28,7780.7858	32,0659.5410	19
20	22,2391.9403	24,7833.1719	27,6764.8572	30,9692.0172	34,7192.5181	20
21	23,4715.8598	26,2989.8354	29,5367.8030	33,2479.6979	37,5052.1440	21
22	24,7163.0183	27,8449.6321	31,4528.8370	35,6178.8858	40,4304.7512	22
23	25,9734.6485	29,4218.6247	33,4264.7022	38,0826.0412	43,5019.9887	23
24	27,2431.9950	31,0302.9972	35,4592.6432	40,6459.0829	46,7270.9882	24
25	28,5256.3150	32,6709.0572	37,5530.4225	43,3117.4462	50,1134.5376	25
26	29,8208.8781	34,3443.2383	39,7096.3352	46,0842.1440	53,6691.2645	26
27	31,1290.9669	36,0512.1031	41,9309.2252	48,9675.8298	57,4025.8277	27
28	32,4503.8766	37,7922.3451	44,2188.5020	51,9662.8630	61,3227.1191	28
29	33,7848.9153	39,5680.7921	46,5754.1571	55,0849.3775	65,4388.4750	29
30	35,1327.4045	41,3794.4079	49,0026.7818	58,3283.3526	69,7607.8988	30
31	36,4940.6785	42,2270.2961	51,5027.5852	61,7014.6867	74,2988.2936	31
32	37,8690.0853	45,1115.7020	54,0778.4128	65,2095.2742	79,0637.7083	32
33	39,2576.9862	47,0338.0160	56,7301.7652	68,8579.0851	84,0669.5937	33
34	40,6602.7560	48,9944.7763	59,4620.8181	72,6522.2486	89,3203.0734	34
35	42,0768.7836	50,9943.6719	62,2759.4427	76,5983.1385	94,8363.2271	35
36	43,5076.4714	53,0342.5453	65,1742.2259	80,7022.4640	100,6281.3884	36
37	44,9527.2361	55,1149.3962	68,1594.4927	84,9703.3626	106,7095.4579	37
38	46,4122.5085	57,2372.3841	71,2342.3275	89,4091.4971	113,0950.2308	38
39	47,8863.7336	59,4019.8318	74,4012.5973	94,0255.1570	119,7997.7423	39
40	49,3752.3709	61,6100.2284	77,6632.9753	98,8265.3633	126,8397.6294	40
41	50,8789.8946	63,8622.2330	81,0231.9645	103,8195.9778	134,2317.5109	41
42	52,3977.7936	66,1594.6777	84,4838.9234	109,0123.8169	141,9933.3864	42
43	53,9317.5715	68,5026.5712	88,0484.0911	114,4128.7696	150,1430.0558	43
44	55,4810.7472	70,8927.1027	91,7198.6139	120,0293.9204	158,7001.5586	44
45	57,0458.8547	73,3305.6447	95,5014.5723	125,8705.6772	167,6851.6365	45
46	58,6263.4432	75,8171.7576	99,3965.0095	131,9453.9043	177,1194.2183	46
47	60,2226.0777	78,3535.1928	103,4083.9598	138,2632.0604	187,0253.9292	47
48	61,8348.3385	80,9405.8966	107,5406.4785	144,8337.3429	197,4266.6257	48
49	63,4631.8218	83,5794.0145	111,7968.6729	151,6670.8366	208,3479.9570	49
50	65,1078.1401	86,2709.8948	116,1807.7331	158,7737.6700	219,8153.9548	50

TABLICA IV.

Wartość terażniejsza jednostki renty, płatnej w końcu każdego okresu w ciągu n okresów: $a_n = v \frac{1 - v^n}{1 - v}$

n	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	n
1	0,9900.990	0,9803.922	0,9708.738	0,9615.385	0,9523.810	1
2	1,9703.951	1,9415.609	1,9134.697	1,8860.947	1,8594.104	2
3	2,9409.852	2,8838.833	2,8286.114	2,7750.910	2,7232.480	3
4	3,9019.656	3,8077.287	3,7170.984	3,6298.952	3,5459.505	4
5	4,8534.312	4,7134.595	4,5797.072	4,4518.223	4,3294.767	5
6	5,7954.765	5,6014.309	5,4171.914	5,2421.369	5,0756.921	6
7	6,7281.945	6,4719.911	6,2302.830	6,0020.547	5,7863.734	7
8	7,6516.778	7,3254.814	7,0196.922	6,7327.449	6,4632.128	8
9	8,5660.176	8,1622.367	7,7861.089	7,4354.316	7,1078.217	9
10	9,4713.045	8,9825.850	8,5302.028	8,1108.958	7,7217.349	10
11	10,3676.282	9,7868.481	9,2526.241	8,7604.767	8,3064.142	11
12	11,2550.775	10,5753.412	9,9540.040	9,3850.738	8,8632.516	12
13	12,1337.401	11,3483.738	10,6349.553	9,9856.479	9,3935.730	13
14	13,0037.030	12,1062.488	11,2960.731	10,5631.229	9,8986.409	14
15	13,8550.525	12,8492.635	11,9379.351	11,1183.874	10,3796.580	15
16	14,7178.738	13,5777.093	12,5611.020	11,6522.956	10,8377.696	16
17	15,5622.513	14,2918.719	13,1661.185	12,1656.689	11,2740.662	17
18	16,3982.686	14,9920.313	13,7535.131	12,6592.970	11,6895.869	18
19	17,2250.085	15,6784.620	14,3237.991	13,1339.394	12,0853.209	19
20	18,0455.530	16,3514.333	14,8774.749	13,5903.263	12,4622.103	20
21	18,8569.831	17,0112.092	15,4150.241	14,0291.600	12,8211.527	21
22	19,6603.793	17,6580.482	15,9369.166	14,4511.153	13,1630.026	22
23	20,4558.211	18,2922.041	16,4436.084	14,8568.417	13,4885.739	23
24	21,2433.873	18,9139.256	16,9355.421	15,2459.631	13,7986.418	24
25	22,0231.557	19,5234.565	17,4131.477	15,6220.799	14,0939.446	25
26	22,7952.037	20,1210.358	17,8768.424	15,9827.692	14,3751.853	26
27	23,5596.076	20,7068.978	18,3270.315	16,3295.858	14,6430.336	27
28	24,3164.432	21,2812.724	18,7641.082	16,6630.632	14,8991.273	28
29	25,0657.853	21,8443.847	19,1884.546	16,9837.146	15,1410.736	29
30	25,8077.082	22,3964.556	19,6004.414	17,2920.333	15,3724.510	30
31	26,5422.854	22,9377.015	20,0004.285	17,5884.936	15,5928.105	31
32	27,2695.895	23,4683.348	20,3887.655	17,8735.515	15,8026.767	32
33	27,9896.925	23,9885.636	20,7657.918	18,1476.457	16,0025.492	33
34	28,7026.659	24,4985.917	21,1319.367	18,4111.978	16,1929.040	34
35	29,4085.801	24,9986.193	21,4872.201	18,6646.132	16,3741.943	35
36	30,1075.050	25,4888.425	21,8322.525	18,9082.820	16,5468.517	36
37	30,7995.099	25,9694.534	22,1672.354	19,1425.788	16,7112.873	37
38	31,4846.633	26,4406.406	22,4924.616	19,3678.642	16,8678.927	38
39	32,1630.330	26,9025.888	22,8082.151	19,5844.848	17,0170.407	39
40	32,8346.861	27,3554.792	23,1147.720	19,7927.739	17,1590.864	40
41	33,4996.892	27,7994.895	23,4124.000	19,9930.518	17,2943.680	41
42	34,1581.081	28,2347.936	23,7013.592	20,1856.267	17,4232.076	42
43	34,8100.081	28,6615.623	23,9819.021	20,3707.949	17,5459.120	43
44	35,4554.535	28,0799.631	24,2542.739	20,5488.413	17,6527.733	44
45	36,0945.084	29,4901.599	24,5187.125	20,7200.397	16,7740.698	45
46	36,7272.361	29,8923.136	24,7754.491	20,8846.536	17,8800.665	46
47	37,3536.991	30,2865.820	25,0247.078	21,0429.361	17,9810.157	47
48	37,9739.595	30,6731.196	25,2667.066	21,1951.309	18,0771.578	48
49	38,5880.787	31,0520.780	25,5016.569	21,3414.720	18,1687.217	49
50	39,1961.175	31,4236.059	25,7297.640	21,4821.846	18,2559.255	50

TABLICA V.

Wartość raty, płatnej w końcu każdego okresu celem umorzenia

$$\text{jednostki długu w ciągu } n \text{ okresów: } \frac{1}{a_n} = r^n \cdot \frac{r - 1}{r^n - 1}$$

<i>n</i>	1 0/0	2 0/0	3 0/0	4 0/0	5 0/0	<i>n</i>
1	1,0100.0000	1,0200.0000	1,0300.0000	1,0400.0000	1,0500.0000	1
2	0,5075.1204	0,5150.4950	0,5226.1084	0,5301.9608	0,5378.0488	2
3	0,3400.2211	0,3467.5467	0,3535.3036	0,3603.4854	0,3672.0856	3
4	0,2562.8109	0,2626.2375	0,2690.2705	0,2754.9005	0,2820.1183	4
5	0,2060.3980	0,2121.5839	0,2183.5457	0,2246.2711	0,2309.7480	5
6	0,1725.4837	0,1785.2581	0,1845.9750	0,1907.6190	0,1970.1747	6
7	0,1486.2828	0,1545.1196	0,1605.0635	0,1666.0961	0,1728.1982	7
8	0,1306.9029	0,1365.0980	0,1424.5639	0,1485.2783	0,1547.2181	8
9	0,1167.4037	0,1225.1544	0,1284.3386	0,1344.9299	0,1406.9008	9
10	0,1055.8208	0,1113.2653	0,1172.3051	0,1232.9094	0,1295.0458	10
11	0,0964.5408	0,1021.7794	0,1080.7745	0,1141.4904	0,1203.8889	11
12	0,0888.4879	0,0945.5960	0,1004.6209	0,1065.5217	0,1128.2541	12
13	0,0824.1482	0,0881.1835	0,0940.2954	0,1001.4373	0,1064.5577	13
14	0,0769.0117	0,0826.0197	0,0885.2634	0,0946.6897	0,1010.2397	14
15	0,0721.2378	0,0778.2547	0,0837.6658	0,0899.4110	0,0963.4229	15
16	0,0679.4460	0,0736.5013	0,0796.1085	0,0858.2000	0,0922.6991	16
17	0,0642.5806	0,0699.6984	0,0759.5253	0,0821.9852	0,0886.9914	17
18	0,0609.8205	0,0667.0210	0,0727.0870	0,0789.9333	0,0855.4622	18
19	0,0580.5175	0,0637.8177	0,0698.1388	0,0761.3862	0,0827.4501	19
20	0,0554.1532	0,0611.5672	0,0672.1571	0,0735.8175	0,0802.4259	20
21	0,0530.3075	0,0587.8477	0,0648.7178	0,0712.8011	0,0779.9611	21
22	0,0508.6371	0,0566.3140	0,0627.4739	0,0691.9881	0,0759.7051	22
23	0,0488.8584	0,0546.6810	0,0608.1390	0,0673.0906	0,0741.3682	23
24	0,0470.7347	0,0528.7110	0,0590.4742	0,0655.8683	0,0724.7090	24
25	0,0454.0675	0,0512.2044	0,0574.2787	0,0640.1196	0,0709.5246	25
26	0,0438.6888	0,0496.9923	0,0559.3829	0,0625.6738	0,0695.6432	26
27	0,0424.4553	0,0482.9309	0,0545.6421	0,0612.3854	0,0682.9186	27
28	0,0411.2444	0,0469.8967	0,0532.9323	0,0600.1298	0,0671.2253	28
29	0,0398.9502	0,0457.7836	0,0521.1467	0,0588.7993	0,0660.4551	29
30	0,0387.4811	0,0446.4992	0,0510.1926	0,0578.3010	0,0650.5144	30
31	0,0376.7573	0,0435.9635	0,0499.9893	0,0568.5535	0,0641.3212	31
32	0,0366.7089	0,0426.1061	0,0490.4662	0,0559.4859	0,0632.8042	32
33	0,0357.2744	0,0416.8653	0,0481.5612	0,0551.0357	0,0624.9004	33
34	0,0348.3997	0,0408.1867	0,0473.2196	0,0543.1477	0,0617.5545	34
35	0,0340.0368	0,0400.0221	0,0465.3929	0,0535.7732	0,0610.7171	35
36	0,0332.1431	0,0392.3285	0,0458.0379	0,0528.8688	0,0604.3446	36
37	0,0324.6805	0,0385.0678	0,0451.1162	0,0522.3957	0,0598.3979	37
38	0,0317.6150	0,0378.2057	0,0444.5934	0,0516.3192	0,0592.8423	38
39	0,0310.9160	0,0371.7114	0,0438.4385	0,0510.6083	0,0587.6462	39
40	0,0304.5560	0,0365.5575	0,0432.6238	0,0505.2349	0,0582.7816	40
41	0,0298.5102	0,0359.7188	0,0427.1241	0,0500.1738	0,0578.2229	41
42	0,0292.7563	0,0354.1729	0,0421.9167	0,0495.4020	0,0573.9471	42
43	0,0287.2737	0,0348.8993	0,0416.9811	0,0490.8989	0,0569.9333	43
44	0,0282.0441	0,0343.8794	0,0412.2985	0,0486.6454	0,0566.1625	44
45	0,0277.0505	0,0339.0962	0,0407.8518	0,0482.6246	0,0562.6173	45
46	0,0272.2775	0,0334.5342	0,0403.6254	0,0478.8205	0,0559.2820	46
47	0,0267.7111	0,0330.1792	0,0399.6051	0,0475.2189	0,0556.1421	47
48	0,0263.3384	0,0326.0184	0,0395.7777	0,0471.8065	0,0553.1843	48
49	0,0259.1474	0,0322.0396	0,0392.1314	0,0468.5712	0,0550.3965	49
50	0,0255.1273	0,0318.2321	0,0388.6549	0,0465.5002	0,0547.7674	50

Spis rzeczy.

	str.
Przedmowa do wydania I-go	5
Przedmowa do wydania II-go	5
Wstęp	7
Pojęcia ogólne	9

ROZDZIAŁ I.

Kapitał na procencie składanym

1. Okresy roczne	11
Zadania	17
2. Stopa dostosowana względna i bezwzględna	21

ROZDZIAŁ II.

Średni termin	25
Zadania	27

ROZDZIAŁ III.

Kapitalizacja wkładek

1. Wkłady wnoszone zgóry	28
2. Wkłady wnoszone zdółu	31
Zadania	35
3. Zamiana wkładek	37
Zadania	40
4. Wkłady zmienne	40

ROZDZIAŁ IV.

Renty

1. Płatność zdółu	43
2. Płatność zgóry	47
3. Zamiana rent	52
4. Renty odroczone	
a) Renty czasowe odroczone, nabywane na podstawie jednorazowej wkładki	53
b) Renty czasowe odroczone, nabywane na podstawie okresowych wkładek	55
5. Renty zmienne	57
6. Renty wieczne	59
Zadania	61

ROZDZIAŁ V.

<i>Umorzenia</i>	str.
1. Umorzenie pożyczek ratami	66
2. Plan umorzenia	67
3. Umorzenie pożyczek ratami oznaczonymi	70
Zadania	71
4. Umorzenie pożyczek wyrażonych w obligacjach	
a) Wykup podług wartości nominalnej	73
Zadania	74
b) Wykup podług wartości wyższej niż nominalna	75

ROZDZIAŁ VI.

Kurs pożyczek

1. Obligacje wykupywane równymi ratami w równych odstępach czasu drogą losowania	83
2. Obligacje wykupywane drogą jednorazowej spłaty w ściśle określonym terminie	88
3. Kurs parytetowy	89
4. Konwersja	92
5. Konsole	96
Zadania	97

ROZDZIAŁ VII.

Ubezpieczenie od strat spowodowanych losowaniem amortyzacyjnem

1. Premja netto płatna przez cały okres umorzenia	99
2. Premja netto zmienna płatna do chwili wylosowania	102
3. Premja netto stała płatna do chwili wylosowania	103
Zadania	106

Tablice.



58537

40 ✓
28/11/6024

1 — 5 — 11 — 25 —
10000 20000
1 — 4 — 9 — 25 —
x x x x

58537

$$H = H(a) \frac{1}{a^2}$$

$$C = \frac{a}{1-a}$$

$$A = \frac{1}{1-a}$$